



UNIVERSIDAD DE QUINTANA ROO
DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍA

**INTERPRETACIÓN DEL MOVIMIENTO
RECTILÍNEO DE OBJETOS A PARTIR DE
SISTEMAS DE REFERENCIA INERCIAL**

TESIS
PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRA EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

PRESENTA
LORENA ANTONIA GUADALUPE PUC ORTIZ

DIRECTOR
DR. JOSÉ GUZMÁN HERNÁNDEZ

ASESORES
DRA. VERÓNICA VARGAS ALEJO
DR. CÉSAR CRISTÓBAL ESCALANTE
DR. AARÓN VÍCTOR REYES RODRÍGUEZ
DRA. MARTHA LETICIA GARCÍA RODRÍGUEZ



UNIVERSIDAD DE QUINTANA ROO

DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍA

**TRABAJO DE TESIS ELABORADO BAJO SUPERVISIÓN DEL COMITÉ DE
ASESORÍA APROBADA COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE:**

MAESTRA EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

COMITÉ DE TESIS

DIRECTOR:

DRA. VERÓNICA VARGAS ALEJO

SUPERVISOR:

DR. CÉSAR CRISTÓBAL ESCALANTE DR.

SUPERVISOR:

DR. AARÓN VÍCTOR REYES RODRÍGUEZ

SUPERVISOR:

DRA. MARTHA LETICIA GARCÍA RODRÍGUEZ



UNIVERSIDAD DE QUINTANA ROO
DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍA
SRIA. TÈC. DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

Chetumal, Quintana Roo, 8 de septiembre de 2015

Dr. Víctor Hugo de Jesús Soberanis Cruz
Director de la División de Ciencias e Ingeniería.
Presente

Nos permitimos informarle la conclusión del trabajo de tesis titulado "Interpretación del movimiento rectilíneo de objetos a partir de sistemas de referencia inercial" de la Ing. Lorena Antonia Guadalupe Puc Ortiz con Matrícula 13-16338, del Programa de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, el cual cumple con los requisitos de forma y contenido establecidos como modalidad de titulación en el Reglamento de Estudios de Posgrados, motivo por el cual emitimos nuestro **VOTO APROBATORIO** para la impresión de la tesis y los tramites a que haya lugar.

Agradeciendo la atención que se sirva prestar a la presente, aprovecho la ocasión para hacerle llegar un cordial saludo.

Atentamente
"Fructificar la razón: trascender nuestra cultura"

Dr. José Guzmán Hernández
Director

Dra. Martha Leticia García Rodríguez
Asesor

Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez
Asesor

Dra. Verónica Vargas Alejo
Asesor

Dr. César Cristóbal Escalante
Asesor

C.c.p. Dra. Norma Angélica Oropeza García.-STPI-DCI
Archivo.

Boulevard Bahía s/n, esquina Ignacio Comonfort, Colonia del Bosque, Código Postal 77019, Chetumal, Quintana Roo, México.
Teléfono +(983)83.50300, Fax +(983)83.29656 www.uqroo.mx

Agradecimientos

Agradezco a CONACYT por proporcionarme la beca para los estudios en la Maestría en la Enseñanza de las Matemáticas (CVU 325280).

Mi agradecimiento a la Universidad de Quintana Roo por darme la oportunidad de ingresar a la Maestría.

Agradezco al Dr. José Guzmán Hernández por su invaluable apoyo al dirigir este trabajo de tesis.

Agradezco a la Dra. Verónica Vargas Alejo, al Dr. César Cristóbal Escalante y al Dr. Víctor Hugo Soberanis Cruz por compartir sus conocimientos con los estudiantes de la Maestría.

Dedicatoria

A mi familia; esposo, hijos, nietos, nuera y yerno por la comprensión al tiempo dedicado a la Maestría.

A Dios por darme la oportunidad de continuar aprendiendo y mejorando mi trabajo para los demás.

Índice

CAPÍTULO 1	1
LA PROBLEMÁTICA	1
1.1. Introducción.....	1
1.2. Objetivos.....	8
1.2.1. <i>General</i>	8
1.2.2. <i>Particulares</i>	8
1.3. Preguntas de investigación	9
1.4. Justificación	9
CAPÍTULO 2	11
MARCO CONCEPTUAL	11
2.1. Introducción.....	11
2.2. Representaciones semióticas	11
2.2.1. <i>Criterios de congruencia entre representaciones semióticas</i>	16
2.2.2. <i>No congruencia y encapsulamiento</i>	19
2.3. Recapitulación sobre el papel de las representaciones semióticas	25
2.4. Unidades Significantes	27
2.4.1. <i>Conversión de Registro Textual a Registro Gráfico</i>	27
2.4.2. <i>Conversión de Registro Gráfico a Registro Algebraico</i>	30
CAPÍTULO 3	33
METODOLOGÍA	33
3.1. Introducción.....	33
3.2. Participantes	33
3.4. Diseño de Actividades.....	43
CAPÍTULO 4	62
ANÁLISIS DE DATOS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS.....	62
4.1. Introducción.....	62
4.2. Categorías de análisis	64
4.3. Análisis de datos de acuerdo con la primera categoría: Uso de gráficas en la objetivación de conceptos relacionados con el movimiento	66

4.4. Análisis de datos de acuerdo con la segunda categoría: Relación entre representación gráfica y simbólica (cambios de registro).....	89
4.5. Análisis de datos de acuerdo con la tercera categoría: Procesos iniciales de Objetivación	95
4.6. Análisis de datos surgidos de la entrevista	95
4.6.1. <i>Entrevista del estudiante ACS</i>	96
4.6.2. <i>Entrevista del estudiante JGE</i>	102
4.6.3. <i>Entrevista del estudiante ARA</i>	108
CAPÍTULO 5	114
CONCLUSIONES	114
5.1. Introducción.....	114
5.2. Respecto a los objetivos de investigación	114
5.3. Respecto a las preguntas de investigación.....	117
5.4. Reflexiones finales	118
5.5. Perspectivas de trabajos futuros sobre esta línea de Investigación	122

Índice de Figuras

<i>Figura 1. 1. Posición (medida en metros respecto al tiempo), correspondiente al Problema 1.</i>	3
<i>Figura 1. 2. Velocidad (m/s) respecto al tiempo, correspondiente al Problema 1.</i>	3
<i>Figura 1. 3. Comportamiento de la posición y velocidad del móvil (Problema 1).</i>	4
<i>Figura 1. 4. Comportamiento de la posición y velocidad del móvil (Problema 2).</i>	5
<i>Figura 2. 1. Diversas representaciones del número 2.</i>	12
<i>Figura 2. 2. Dos registros de representación distintos.</i>	12
<i>Figura 2. 3. Registro escrito del número 2.</i>	13
<i>Figura 2. 4. Representación de una recta.</i>	14
<i>Figura 2. 5. Imagen con dos objetos en ausencia de la línea de horizonte [Horizontal]. Tomada de Duval (1995, p. 49).</i>	17
<i>Figura 2. 6. Correspondencia semántica de las dos representaciones.</i>	19
<i>Figura 2.7. Tres características esenciales en la interpretación de un concepto.</i>	26
<i>Figura 3. 1. Móvil desplazándose hacia la derecha sobre una calle.</i>	47
<i>Figura 3. 2. Forma en la que se registra el tiempo y la distancia recorrida.</i>	48
<i>Figura 3. 3. Esquemmatización del movimiento rectilíneo.</i>	48
<i>Figura 3. 4. Móvil desplazándose en reversa 15 s después de haber iniciado el movimiento.</i>	49
<i>Figura 3. 5. Esquemmatización del movimiento de la persona.</i>	50
<i>Figura 3.6. Esquemmatización del movimiento de la persona.</i>	51
<i>Figura 3.7. Esquemmatización del movimiento de la persona.</i>	52
<i>Figura 3.8. Comentarios de personajes de caricaturas sobre el uso de un punto de referencia.</i>	53
<i>Figura 3.9. Al girar 90° el eje de posición se tiene un plano cartesiano.</i>	54
<i>Figura 3. 10. Plano cartesiano utilizado para realizar la Actividad 9.</i>	55
<i>Figura 3. 11. Representación del movimiento del objeto.</i>	55
<i>Figura 3. 12. Proyección hacia el eje vertical del movimiento del objeto.</i>	56
<i>Figura 3. 13. Interpretación de la proyección hacia el eje vertical del movimiento del objeto.</i>	56
<i>Figura 3. 14. Interpretación de la proyección del movimiento del objeto en el intervalo $t = 4$ a 8 s.</i>	57
<i>Figura 3. 15. Proyección del tercer intervalo de tiempo $t = 8$ a 13 s.</i>	57
<i>Figura 3. 16. Interpretación de la proyección del movimiento del objeto.</i>	57
<i>Figura 3. 17. Representación de persona caminando.</i>	58
<i>Figura 3. 18. Tabla de valores de caminata de dos personas respecto al tiempo.</i>	58
<i>Figura 3. 19. Planos cartesianos utilizados para realizar la Actividad 10.</i>	59

<i>Figura 3. 20. Representación gráfica y tabular de la caminata con respecto al tiempo de dos personas.....</i>	<i>60</i>
<i>Figura 4. 1. Interpretación del movimiento del objeto (persona) a partir de la representación gráfica de su movimiento.....</i>	<i>67</i>
<i>Figura 4. 2. Interpretación del movimiento del objeto (persona) mediante la representación gráfica de su movimiento.</i>	<i>67</i>
<i>Figura 4. 3. Interpretación de la posición del objeto (persona) mediante la representación gráfica de su movimiento.</i>	<i>68</i>
<i>Figura 4. 4. Interpretación de la posición del objeto (persona) mediante la representación gráfica de su movimiento.</i>	<i>69</i>
<i>Figura 4. 5. Móvil desplazándose hacia la derecha en los primeros 15 segundos y hacia la izquierda los últimos 20 segundos.</i>	<i>71</i>
<i>Figura 4. 6. Resultado de la Actividad 3, correspondiente al estudiante MCT.</i>	<i>72</i>
<i>Figura 4. 7. Resultado de la Actividad 3, correspondiente al estudiante ACS.</i>	<i>72</i>
<i>Figura 4. 8. Resultado de la Actividad 9, correspondiente al estudiante MCT.</i>	<i>75</i>
<i>Figura 4. 9. Resultado de la Actividad 9, correspondiente al estudiante MCT.</i>	<i>75</i>
<i>Figura 4. 10. Resultado de la Actividad 9, correspondiente al estudiante ACS.....</i>	<i>77</i>
<i>Figura 4. 11. Resultado de la Actividad 9, correspondiente al estudiante ACS.....</i>	<i>77</i>
<i>Figura 4. 12. Gráfico mostrado en la Actividad 11.</i>	<i>79</i>
<i>Figura 4. 13. Resultado de la Actividad 7, correspondiente al estudiante MCT.....</i>	<i>81</i>
<i>Figura 4. 14. Resultado de la Actividad 8, correspondiente al estudiante MCT.....</i>	<i>82</i>
<i>Figura 4. 15. Resultado de la Actividad 7, correspondiente al estudiante ARA.</i>	<i>82</i>
<i>Figura 4. 16. Resultado de la Actividad 8, correspondiente al estudiante ARA.</i>	<i>83</i>
<i>Figura 4. 17. Resultado de la Actividad 7, correspondiente al estudiante JGE.....</i>	<i>83</i>
<i>Figura 4. 18. Resultado de la Actividad 7, correspondiente al estudiante JGE.....</i>	<i>84</i>
<i>Figura 4. 19. Resultado de la Actividad 8, correspondiente al estudiante JGE.....</i>	<i>84</i>
<i>Figura 4. 20. Resultado de la Actividad 10, correspondiente al estudiante MCT.</i>	<i>86</i>
<i>Figura 4. 21. Resultado de la Actividad 10, correspondiente al estudiante MCT.</i>	<i>86</i>
<i>Figura 4. 22. Resultado de la actividad 10 correspondiente al estudiante JGE.</i>	<i>87</i>
<i>Figura 4. 23. Resultado de la Actividad 10, correspondiente al estudiante JGE.</i>	<i>87</i>
<i>Figura 4. 24. Resultado de la Actividad 11, correspondiente al Equipo 1.</i>	<i>90</i>
<i>Figura 4. 25. Actividad 11, correspondiente al Equipo 1.</i>	<i>91</i>
<i>Figura 4. 26. Resultado de la Actividad 11, correspondiente al Equipo 1.</i>	<i>91</i>
<i>Figura 4. 27. Resultados del Equipo 1.</i>	<i>92</i>
<i>Figura 4. 28. Resultado de la Actividad 11, correspondiente al Equipo 2.</i>	<i>92</i>
<i>Figura 4. 29. Resultado de la Actividad 11, correspondiente al Equipo 2.</i>	<i>93</i>
<i>Figura 4. 30. Resultado de la Actividad 11, correspondiente al Equipo 2.</i>	<i>93</i>
<i>Figura 4. 31. Resultado de la Actividad 11, correspondiente al Equipo 2.</i>	<i>93</i>
<i>Figura 4. 32. Resultados de la Actividad 11 del Equipo 2.</i>	<i>94</i>

<i>Figura 4. 33. Grupo de Estudiantes, trabajando en equipo en la solución de las Actividades.....</i>	<i>94</i>
<i>Figura 4. 34. Estudiante señalando el sentido del movimiento.</i>	<i>95</i>
<i>Figura 5. 1. Ejercicio final, relación entre las gráficas y las funciones.....</i>	<i>117</i>
<i>Figura 5. 2. Representación gráfica del movimiento de un objeto.....</i>	<i>120</i>
<i>Figura 5. 3. Resultados esperados de la Actividad propuesta.....</i>	<i>121</i>

Índice de tablas

<i>Tabla 2. 1. Ejemplo 3: Expresiones algebraicas</i>	14
<i>Tabla 2. 2. Más ejemplos de expresiones algebraicas</i>	15
<i>Tabla 2. 3. Expresiones algebraicas con sus significados posibles</i>	15
<i>Tabla 2. 4. Transformaciones en el mismo registro</i>	16
<i>Tabla 2. 5. Unidades de significación</i>	18
<i>Tabla 2. 6. Otras unidades significantes</i>	18
<i>Tabla 2. 7. Muestra los resultados de 16 conversiones de registros. Tomada de Duval (1995, p. 56)</i>	20
<i>Tabla 2. 8. Resultados de las preguntas 1,2 y 3 de la tabla 4. Tomada de Duval (1995, p. 56)</i>	21
<i>Tabla 2. 9. Resultados de las preguntas 4 y 8 de la Tabla 4. Tomada de Duval (1995, p. 56)</i>	22
<i>Tabla 2. 10. Resultados de las preguntas 5 y 6 de la Tabla 4. Tomada de Duval (1995, p. 56)</i>	23
<i>Tabla 2. 11. Resultados de las preguntas 7 y 8 de la Tabla 4. Tomada de Duval (1995, p. 56)</i>	24
<i>Tabla 2. 12. Tres maneras de ver los gráficos cartesianos, p. 67: "Problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo" (Duval, 2001)</i>	26
<i>Tabla 2. 13. Representaciones cartesianas respecto al tiempo y distintos tipos de movimientos de un móvil</i>	29
<i>Tabla 2. 14. Gráfico con su probable expresión algebraica</i>	31
<i>Tabla 4. 1. Tres características esenciales en la interpretación de un concepto</i>	62
<i>Tabla 4. 2. Tres maneras de ver los gráficos cartesianos (p. 67). Tabla tomada del libro: "Problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo" (Duval, 2001)</i>	63
<i>Tabla 4. 3. Descripción de la primera categoría de análisis</i>	65
<i>Tabla 4. 4. Aplicación de las Actividades didácticas escritas</i>	71

Resumen

En esta tesis se reportan los resultados obtenidos al implementar Actividades didácticas diseñadas con el propósito de que los estudiantes den sentido a conceptos de la física, como: velocidad, aceleración, entre otros. Un concepto, aparentemente, sencillo, y que tiene fuerte impacto en este trabajo es el referente a los *Sistemas de referencia*. Mediante el uso de estos sistemas, se propuso a los estudiantes que analizaran el movimiento de objetos físicos dándoles la gráfica bosquejada en un sistema cartesiano; en el que se deba un cierto origen del movimiento de ese objeto.

El marco conceptual en el que se apoya este trabajo es el de Raymond Duval sobre la teoría de las representaciones. De esta teoría fueron utilizados dos constructos de ésta: (a) la visualización y (b) la objetivación. En el interior de esta tesis se definen estos constructos en términos de la teoría de las representaciones, y se dan ejemplos de cómo estos fueron usados. El acopio de datos fue mediante el trabajo en equipo a un grupo de estudiantes de nivel universitario [los detalles de cómo fueron seleccionados estos alumnos así la duración del trabajo con ellos se da en el Capítulo 3 de esta tesis].

El análisis de los datos fueron analizados, tomando en cuenta las categorías sobre visualización [las distintas formas de "ver" un objeto matemático] y cómo ésta les permitía (a los estudiantes) "llegar" paulatinamente a lo que Duval llama: la objetivación del objeto [conocimiento]. Todos los detalles del análisis de datos son evidenciados, con mucho detalle en el Capítulo 4 de esta tesis. De los resultados obtenidos de este trabajo, se puede decir que los conceptos físicos (e.g., velocidad y aceleración, entre otros) adquieren sentido (son objetivados) por los estudiantes cuando los analizan haciendo uso de "sistemas de referencia"; pues sin estos sistemas no tienen sentido expresiones cotidianas como: a la derecha, a la izquierda, arriba, abajo, etc. Así, la posición de un objeto, cuando éste está en movimiento depende de quién lo "mire".

Presentación

Este trabajo de tesis no es, específicamente, de investigación en el amplio sentido como se entiende en educación matemática, pero sí contiene *rasgos* que bien pueden ser identificados como tales. No se trata de una tesis de profesionalización, en sentido amplio del término, aunque sí se proponen Actividades que propician la reflexión de los estudiantes en torno a conceptos de la física escolar; conceptos que forman parte del currículo escolar de nivel superior. Más precisamente, tales conceptos se ubican en aquellos que tratan sobre el estudio de los cuerpos en movimiento; por ejemplo: distancia recorrida por un móvil, velocidad, aceleración, entre otros. Un concepto central en este trabajo de tesis es el referente a los sistemas de referencia, como proveedores de significados conceptuales. Las representaciones gráficas, relacionadas con el movimiento de objetos, también, jugaron un papel importante en este trabajo de tesis.

El propósito del diseño de las Actividades propuestas, y que forman el núcleo principal de este trabajo, es que mediante la reflexión de los estudiantes sobre las representaciones de objetos en movimiento, logren modificar sus esquemas de aprendizaje logrados en ambientes tradicionales de enseñanza. Aunque no se trabaja, específicamente, con secuencias didácticas, cuyo propósito es la mejora del aprendizaje de los estudiantes, las Actividades diseñadas e implementadas en este trabajo sí tienen el propósito de potenciar el aprendizaje de los estudiantes mediante la reflexión de las representaciones de los objetos en movimiento.

Los sistemas de referencia son utilizados en la enseñanza de conceptos no sólo de la física, sino también de las matemáticas; la localización de puntos en el Plano Cartesiano es un ejemplo de ello. Pocas veces, en los distintos niveles educativos, se reflexiona sobre la importancia que los sistemas de referencia tienen tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de conceptos. Por ejemplo, sin ellos no tendrían sentido palabras como: derecha, izquierda, arriba, abajo, más lento, más rápido, entre otros. En resumen, en este trabajo de tesis se muestra cómo los estudiantes logran Objetivar conceptos de la física escolar a través del estudio y la reflexión de ellos.

CAPÍTULO 1

LA PROBLEMÁTICA

1.1. Introducción

En los primeros semestres de las licenciaturas de la División de Ciencias e Ingenierías de la Universidad de Quintana Roo se requiere que el estudiante pueda describir el movimiento rectilíneo de una partícula y representarlo en un sistema coordenado y relacionarlo con la función correspondiente. Conceptos como: sistema de referencia, posición, distancia recorrida, desplazamiento, rapidez y velocidad media, entre otros, están involucrados en esta descripción. La representación algebraica, gráfica y expresión verbal o escrita están vinculadas con el entendimiento conceptual. Las dificultades de comprensión de los conceptos, por parte de los estudiantes, están relacionadas con el hecho de que en ocasiones, ellos identifican y operan con una de las múltiples representaciones que pueden tener los conceptos.

Al comparar el contenido y redacción de los siguientes problemas, tomados del libro de Cálculo 1, Larson R., novena edición, sección 2.2, problema 97 (derivadas) p. 117, sección 4.1, ejercicio 73 (integrales) p. 257, se puede distinguir la naturaleza de los problemas que con frecuencia son discutidos en clase, cuando se hace alusión al movimiento de móviles.

Problema 1. Para resolver este problema utiliza la función de posición $s(t) = -16t^2 + v_0t + s_0$ asociada con la caída libre de objetos [móviles]. Desde una altura de 220 pies, se lanza hacia abajo una bola [móvil] con una velocidad inicial de 22 pies/s este valor se toma como negativo ya que al pasar una tangente en ese punto de inicio (220 pies) vemos que la pendiente es negativa. La pregunta es: ¿cuál es su velocidad al tocar el suelo?

Solución: al sustituir los datos en la función de posición se obtiene: $s(t) = -16t^2 - 22t + 220$ pies. Dado que se desea saber la velocidad del móvil al caer al suelo, entonces se necesita derivar la función que modela la posición del móvil. Al hacerlo, se obtiene: $s'(t) = -32t - 22$. Esta última expresión simbólica corresponde a la velocidad

del móvil –la Figura 1.2 muestra la velocidad con respecto al tiempo–, pero aún se desconoce el tiempo en el que la bola toca el suelo. Para hallar ese tiempo, y dado que la bola al ir cayendo va perdiendo altura hasta tocar el suelo, entonces es lógico que se iguale a cero la función posición $s(t) = -16t^2 - 22t + 220$. La Figura 1.1 indica la posición respecto al tiempo. Una vez hallado ese tiempo, se sustituye en $s'(t)$ y se contesta la pregunta del problema. En este tipo de movimientos, es común que en los libros de texto se adopte [en forma de convenio] que la velocidad hacia abajo del móvil (desde un cierto punto de referencia inercial) sea tomada como negativa; desde luego que este es sólo un criterio, pues también hay textos que consideran que la velocidad de cualquier móvil desde un cierto punto de referencia inercial es positiva.

Problema 2. Para resolver este problema, utiliza $a(t) = -32 \text{ pies}/s^2$. En esta expresión $a(t)$ representa la aceleración del móvil debida a la gravedad, ignorando la resistencia al aire. El problema es: ¿con qué velocidad inicial debe lanzarse un objeto hacia arriba (desde el nivel del suelo) para alcanzar la parte superior del monumento a Washington (cerca de 550 pies)? Enseguida se da una forma de resolver este problema.

Solución: dado que se pregunta por la velocidad inicial del objeto y se conoce su aceleración, entonces para hallar la velocidad inicial del móvil, se debe integrar la función que modela la aceleración del objeto. Al hacerlo, se obtiene la función $v(t) = -32t + v_0$. Se desea saber el valor de v_0 , pero se desconoce el valor de t cuando el móvil alcanza su punto más alto. Para hallar esos valores [tanto de v_0 como de t], se necesita otra función, siendo ésta la que describe la trayectoria del móvil. Una simple integración de la velocidad del móvil da como resultado la función de posición de éste: $s(t) = -16t^2 + v_0t + s_0$. De acuerdo con las condiciones iniciales [implícitas] del problema se tiene que $s_0 = 0$ y $v(t) = -32t + v_0 = 0$; ya que se detiene por un instante en el punto más alto; de modo que $-32t + v_0 = 0$, o bien $v_0 = 32t$; así $\frac{v_0}{32} = t$, mientras que $-16t^2 + v_0t = 550$. Haciendo simultáneas las ecuaciones $\frac{v_0}{32} = t$ y $-16t^2 + v_0t = 550$ se determina el valor de v_0 .

La forma de resolver este tipo de problemas ocasiona dificultades de aprendizaje por parte de los estudiantes. Por ejemplo, con frecuencia ellos preguntan ¿por qué se igualó a cero la función posición en el primer problema y en el segundo se igualó a cero la ecuación de la velocidad? ¿Qué no es siempre la función posición la que se iguala a cero? Estas y otras preguntas similares muestran un desconocimiento de los estudiantes en la forma de representar gráficamente el movimiento de los objetos y cómo tomar decisiones con base en la información proporcionada por esas representaciones. Si se les pide a los estudiantes graficar o hacer un bosquejo de las tres ecuaciones (posición, velocidad y aceleración) con sólo ver las ecuaciones, tienen dificultades al intentar graficar. Por ejemplo, en el primer problema el *movimiento* del móvil se describe sólo en el primer cuadrante del plano cartesiano, ya que el movimiento no corresponde a ninguno de los otros tres cuadrantes (segundo, tercero y cuarto). La gráfica de la velocidad –para este mismo ejemplo– ocupa sólo el cuarto cuadrante, y entonces los estudiantes con frecuencia se confunden, y piensan que la abscisa es el suelo para todos los tipos de movimientos (posición, velocidad y aceleración). Esta confusión dificulta aún más a los estudiantes si se tratan de hacer los bosquejos gráficos con solo leer el enunciado del problema.

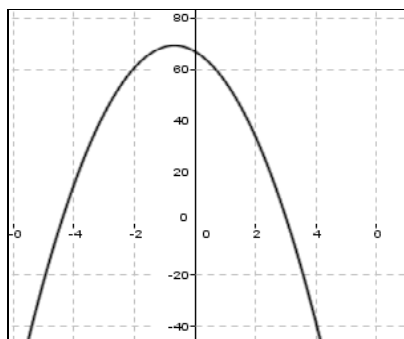


Figura 1. 1. Posición (medida en metros respecto al tiempo), correspondiente al Problema 1.

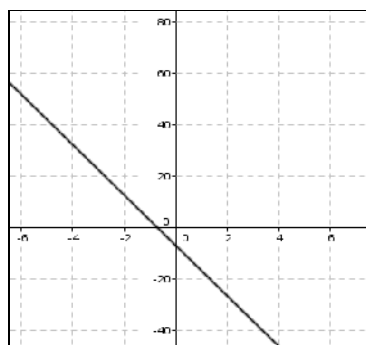


Figura 1. 2. Velocidad (m/s) respecto al tiempo, correspondiente al Problema 1.

Al graficar en GeoGebra las dos funciones $s(t) = -16t^2 - 22t + 220$ y $v(t) = -32t - 22$ se puede observar en las figuras 1.1 y 1.2: una parábola y una recta, sin embargo, no *toda* la gráfica representa el movimiento de la posición y velocidad, sólo una parte de ella. En estas graficas no se distinguen inmediatamente de dónde a dónde ocurre el movimiento de los móviles. Los estudiantes tienen que identificar en las gráficas los tipos de movimiento, ¿cómo suceden? ¿En qué región del plano cartesiano? ¿Por qué? Los estudiantes deben saber identificar cada uno de estos conceptos-posición, distancia recorrida, desplazamiento, rapidez media y velocidad media- en las gráficas, tomando en cuenta algún sistema de referencia inercial.

En la práctica educativa, cuando se pretende evaluar el conocimiento de los estudiantes mediante exámenes, se les ha preguntado, por ejemplo, ¿qué velocidad tendrá el móvil después de 5 segundos?, y el estudiante sustituye 5 en la función de velocidad y responde 182 p/s. Las operaciones aritméticas son correctas, pero el análisis no lo es debido a que sólo permanecen en el registro algebraico sin tomar en cuenta el registro gráfico. Si observaran la gráfica de posición del cuerpo en función del tiempo se darían cuenta de que el objeto toca el suelo antes de los 4 segundos con una velocidad de 120.56 p/s, por lo que la pregunta de ¿qué velocidad tendrá el móvil después de 5 segundos? No tiene ningún sentido, puesto que el cuerpo ha dejado de moverse.

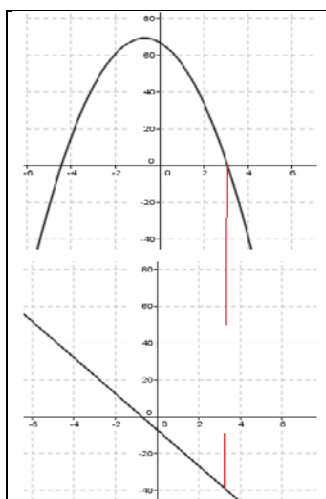


Figura 1. 3. Comportamiento de la posición y velocidad del móvil (Problema 1).

En la Figura 1.3 se observa que el movimiento del objeto sólo dura de 0 a 3.08 segundos. En la gráfica de la posición, el movimiento está representado sólo en el primer

cuadrante y en la gráfica de la velocidad sólo lo está en el cuarto cuadrante. El tema relacionado con el Problema 1 es *derivadas* y el tema relacionado con el Problema 2 es *integrales*, sin embargo, no sólo es importante saber derivar e integrar, sino que también es igual de importante el saber manejar e interpretar los comportamientos de las funciones en los planos cartesianos.

En el Problema 2, la posición del objeto que se observa en la gráfica se ubica en el primer cuadrante; el comportamiento de la velocidad del móvil se observa en el primero y cuarto cuadrantes. El tiempo que tarda en subir el objeto es 5.86 segundos, y el tiempo total de su trayectoria rectilínea fue de 11.72 segundos. En la Figura 1.4 se observa el comportamiento de la posición y de la velocidad del objeto que describe el Problema 2.

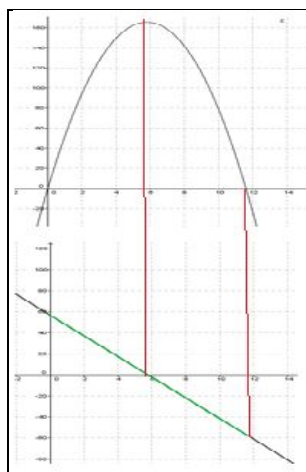


Figura 1. 4. Comportamiento de la posición y velocidad del móvil (Problema 2).

Regresando a las preguntas probables de los estudiantes, cuando resuelven problemas similares al 1 y 2 aquí comentados: ¿por qué debí igualar a cero la función de la posición del móvil en el primer Problema y en el segundo igualé a cero la función de la velocidad? ¿Qué no es siempre la función de la posición del móvil la que se iguala a cero? Las respuestas a estos tipos de preguntas se logran haciendo un análisis entre el comportamiento de las gráficas en el plano cartesiano y de lo que ocurre realmente en el movimiento físico del objeto.

Una vez hechos los análisis correspondientes a las gráficas que modelan el movimiento de los objetos, y tomando en cuenta el movimiento real de los objetos, se trata de completar el análisis del movimiento de los objetos mediante las expresiones algebraicas

(funciones) asociadas con el movimiento [si las hay, y si no entonces hay que determinarlas] para saber en cuál de las funciones hay que igualar a cero. La operatividad entre la representación gráfica, la representación algebraica y la representación escrita llevan al dominio conceptual (Duval, 1995).

Describir el movimiento de un objeto implica utilizar información representada en diversas formas: tablas de valores, gráficas, funciones, etc. Y a partir de ella se hacen afirmaciones sobre el movimiento del objeto, tratando de dar respuesta a preguntas como las siguientes: ¿en dónde se encontraba el móvil después de transcurrido cierto tiempo t ? ¿En qué momento alcanza su altura máxima o su velocidad es cero? ¿Qué distancia ha recorrido después de transcurrido un tiempo t_0 ? ¿En cuánto tiempo su velocidad es cero, y qué significado físico tiene? ¿Cuál es su rapidez del móvil, y qué significado tiene? Etcétera.

Para contestar estas preguntas el estudiante puede resolverlas, usando sólo la gráfica, o bien, la tabla de valores; también la expresión de la función, depende de lo que se desea encontrar. Con los datos de la tabla y la ecuación de velocidad media se encuentra el valor o módulo de la velocidad, es decir, la rapidez; pero si se trata de encontrar la distancia recorrida con la tabla en un tiempo fraccionario sólo se puede aproximar el dato de la respuesta. Con la tabla de valores no es posible encontrar la velocidad instantánea. En cambio, con la gráfica de $x-t$ (posición en función del tiempo) la información tiene una mayor amplitud.

Mediante el análisis de la gráfica en un sistema de referencia de "posición en función del tiempo" se puede ver, por ejemplo, las pendientes de las rectas [si las hay] y conocer la velocidad media y su rapidez media en cada uno de los intervalos, se puede *apreciar* en dónde la velocidad aumentó o disminuyó en un solo golpe de vista. Si la velocidad es constante, también, se puede conocer la rapidez instantánea y se puede ver el desplazamiento y la distancia recorrida de todo el movimiento, así mismo la rapidez y velocidad media; si la velocidad es variable y se bosqueja la gráfica con la ayuda de GeoGebra, por ejemplo, se puede auxiliar con la construcción de pendientes de las rectas en un punto de la curva y, de esa manera, conocer la rapidez y velocidad instantánea ; con la expresión de la función sólo es posible conocer la velocidad instantánea.

Una forma de proporcionar la información sobre un objeto en movimiento son las gráficas posición-tiempo, siempre y cuando sean conocidas las expresiones algebraicas que modelan el movimiento de esos objetos. Sin embargo, hay investigaciones (e.g., Radford et al., 2003; Miranda, 2012; Salinas, 2013, entre otras) donde los estudiantes obtienen gráficas del movimiento de los objetos utilizando sensores; en este trabajo no se sigue este vía de investigación, sino más bien, se hace uso de representaciones oficiales (gráficas) sugeridas en los libros de texto, y asociadas con el movimiento de objetos.

La utilización de gráficas [institucionales] –sistemas de referencia inercial– es pertinente para comunicar información a otras personas; en especial, para analizar el movimiento de objetos físicos. Aprender a elaborar y a interpretar gráficas es una de las tareas en los cursos de matemáticas o física. Muchos resultados sobre el movimiento de objetos se obtienen utilizando representaciones gráficas. Desarrollar la habilidad para interpretar la información contenida en una gráfica es importante para realizar inferencias sobre el movimiento del objeto, y responder preguntas sobre el mismo.

Los errores más comunes que los estudiantes cometen al tratar de interpretar las gráficas de posición de los objetos en un tiempo determinado están relacionados con la creencia de que el movimiento de los objetos se da según la dirección de las líneas que observan en la gráfica- como advierte Sears (1999):

La curva de la figura *no* representa la trayectoria del coche, ésta es una línea recta como se ve en la Fig. 2-1. Más bien, la gráfica es una forma de representar cómo cambia la posición del coche con el tiempo. (p. 33)

Con frecuencia, los estudiantes creen que si la línea [gráfica], que describe la velocidad del objeto, es inclinada [tomando en cuenta un cierto sistema referencial] hacia arriba, entonces el objeto se dirige hacia arriba o por el contrario si se dirige hacia abajo entonces el objeto va en esa dirección, y no observan la parte medular del movimiento concerniente a la relación de esa gráfica con el concepto de velocidad media.

Saber interpretar una gráfica de posición en función del tiempo ayuda al estudiante a observar el movimiento rectilíneo de un objeto al paso del tiempo dentro de un marco de referencia inercial, además, en ella se puede ver el aumento o disminución de la rapidez así como saber su velocidad en diferentes intervalos de tiempo. La tendencia del movimiento,

se puede comparar con la distancia total recorrida con el desplazamiento, señala, también, el tipo de velocidad, ya sea constante o variable. El estudiante puede resolver problemas apoyándose, también, en las gráficas. Este apoyo a los estudiantes es una oportunidad de aplicar las herramientas matemáticas en la resolución de problemas, pues se puede determinar, entre otros valores, la distancia recorrida a partir de áreas en la gráfica de la velocidad; el uso de gráficas también ayudan a transformar matemáticamente los datos de un fenómeno físico a expresiones matemáticas.

Conscientes de esta problemática, en este trabajo de tesis se pretende que los alumnos adquieran [o construyan] conocimiento que les permita desarrollar habilidades, no sólo para la resolución de problemas sobre el movimiento de objetos, sino para poder avanzar en la comprensión de otros marcos de interpretación más complejos, por ejemplo, la aceleración, la velocidad instantánea, velocidad promedio, tasa de cambio, entre otros, tomando como recurso principal el uso de gráficas en el plano; asociadas al movimiento de objetos. Es pertinente recalcar que en este trabajo son utilizadas gráficas oficiales – entendidas como aquellas que surgen en el contexto escolar–, y provenientes de expresiones simbólicas asociadas a funciones lineales y cuadráticas.

1.2. Objetivos

1.2.1. General

Que el estudiante desarrolle la habilidad de interpretar el movimiento de objetos presentado mediante sistemas de referencia inercial a una expresión verbal y algebraica, cuando sea posible.

1.2.2. Particulares

1.2.2.1. El estudiante podrá identificar la posición de un objeto respecto al tiempo en un sistema de referencia inercial. Podrá ubicar la posición inicial, posición final y el tiempo cuando el cuerpo en movimiento pase por el origen.

1.2.2.2. El estudiante podrá interpretar a partir de la posición de un objeto, la distancia recorrida del mismo respecto al tiempo, es decir, interpretar el sentido en el que se mueve el cuerpo respecto al tiempo y sumar la distancia total del movimiento.

1.2.2.3. *El estudiante podrá interpretar, a partir de la posición de un objeto, el desplazamiento del mismo respecto al tiempo, es decir, que él podrá identificar la distancia entre la posición inicial y final.*

1.2.2.4. *El estudiante podrá relacionar el tipo de velocidad-constante o variable- con la función lineal y cuadrática.*

1.2.2.5. *El estudiante podrá calcular la rapidez media e identificar velocidad media de todo el movimiento realizado por el objeto a partir de la distancia total recorrida y el desplazamiento.*

1.2.2.6. *El estudiante podrá interpretar la diferencia entre la rapidez media y velocidad media de un objeto representado en un sistema de referencia inercial.*

1.3. Preguntas de investigación

a) *¿Qué efectos tiene en el aprendizaje de los estudiantes de ingeniería la utilización de gráficas cartesianas en la modelación e interpretación de movimientos de objetos físicos?*

Esta pregunta se respondió mediante la utilización de modelos gráficos de funciones lineales y cuadráticas relacionadas con el movimiento de objetos. Los datos fueron tomados mediante entrevista a estudiantes. Se puso atención especial en la interpretación de los gráficos mostrados en los que subyacen conceptos como los de: distancia recorrida por un móvil en un tiempo determinado si la velocidad de tal objeto es uniforme.

b) *¿Cómo llevan a cabo los estudiantes la conversión del registro gráfico al simbólico?*

Para responder esta pregunta se puso atención especial, durante la entrevista, en cómo logran los estudiantes interpretar en lenguaje verbal la velocidad de objetos cuando el movimiento de esos objetos es linealmente uniforme, y éste es modelado por rectas crecientes, decrecientes y constantes.

1.4. Justificación

La importancia de esta investigación radica en el hecho de que el estudiante debe conocer los sistemas de referencias inerciales que le permitan predecir la posición de un objeto en un tiempo determinado, de observar y describir el movimiento, de registrarlo, de representarlo en una gráfica, de relacionarlo con la velocidad media. Se pretende que los

estudiantes puedan observar cualquier fenómeno físico y no físico y decir de qué se trata, por ejemplo, el registro de la muerte diaria de peces. Saber interpretar gráficas da a los estudiantes la habilidad de descubrir el comportamiento de este fenómeno y de otros similares, de modo que pueda manejarlos con fines matemáticos para predecirlos más eficientemente

Identificar magnitudes físicas [en sus representaciones gráficas] permite interpretar los movimientos con certeza y sin ambigüedad. Desarrollar esta habilidad permite al estudiante tener confianza en la manipulación de los datos en cualquier tipo de fenómeno, en general. Los egresados de las diferentes licenciaturas de la división de Ciencias e Ingenierías deben tener bases firmes en la comprensión de diversos conceptos que obtuvieron en la Universidad, de modo que les dé una visión global en el momento de resolución de los problemas que se les presenten en la vida cotidiana.

El siguiente Capítulo de esta tesis se dedica a la discusión de la teoría de representaciones expuesta por Duval (1995).

CAPÍTULO 2

MARCO CONCEPTUAL

2.1. Introducción

En matemáticas, en particular, el aprendizaje de los objetos matemáticos es conceptual y procedimental; el estudiante no entra en “contacto” directo con los objetos. De acuerdo con Duval (1995), este proceso es llevado a cabo mediante *sistemas semióticos*. En este Capítulo 2 se precisará, un poco más adelante, en términos de la teoría de Duval qué significado tienen estos tipos de *sistemas*. Más precisamente, se pondrá énfasis en las representaciones semióticas, cuyos fines son de comunicación, de transformación y de objetivación del conocimiento matemático, entre otros.

2.2. Representaciones semióticas

El conocimiento matemático se presenta –en la enseñanza escolarizada–, comúnmente, en forma abstracta, lo que produce en los estudiantes dificultades de aprendizaje de este tipo de conocimiento. Es común que en las prácticas escolares, los profesores de los distintos niveles educativos introduzcan conceptos dando prioridad a las definiciones de los objetos algebraicos o numéricos, y dejen de lado al manejo de significados en los dominios visual, verbal o escrito de esos objetos matemáticos. Duval (1995) sugiere que se aprenden conceptos matemáticos en la medida en que se abstrae un objeto de sus representaciones a través de sistemas semióticos. Al respecto, este autor menciona:

La especificidad de las representaciones semióticas consiste en que son relativas a un sistema particular de signos: el lenguaje, la escritura algebraica o los gráficos cartesianos, y en que pueden ser convertidas en representaciones “equivalentes” en otro sistema semiótico, pero pudiendo tomar **significaciones** [negritas en el original] diferentes para el sujeto que las utiliza. (p. 27)

Las tres características cognitivas de los sistemas semióticos en el aprendizaje de los conceptos matemáticos (o de cualquier otra disciplina) son: 1) Representación, 2) Tratamiento y 3) Conversión. Comenzando con la representación, este proceso cognitivo basado en representaciones semióticas (signos y su significado) es de particular

importancia, ya que es la “entrada” cognitiva de un concepto y está basada en la objetivación: “La objetivación corresponde al descubrimiento por el sujeto mismo de aquello que hasta entonces no sospechaba, incluso si otros se lo hubieran explicado” Duval (1995, p.32). Es decir, cuando el estudiante ha entendido y tomado significado o dicho de forma coloquial “le ha caído el veinte”.

La función más importante de la representación es la comunicación. También, cumple las funciones primordiales de tratamiento de la información y de objetivación. Una vez que el estudiante le ha dado significado al concepto, éste se refuerza más cuando se realizan varios tratamientos dentro de un mismo registro. Por ejemplo, al decir “dos”, se puede escribir lo siguiente:

Dos
2
1+1
$2^2 - 2$
2(1)
4/2
$\frac{8(x+1)}{4(x+1)} x \neq -1$

Figura 2. 1. Diversas representaciones del número 2.

La conversión de una representación semiótica consiste, de acuerdo con Duval

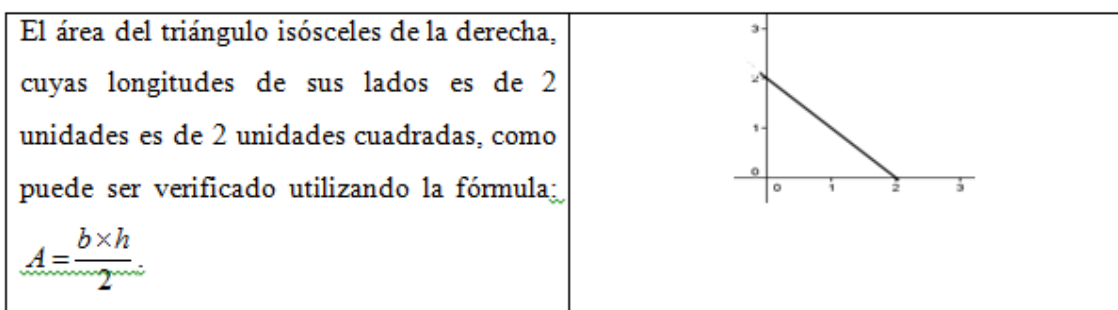


Figura 2. 2. Dos registros de representación distintos.

(1995), en pasar de un registro a otro distinto, por ejemplo, de un registro algebraico a uno gráfico, como se muestra a continuación.

De manera verbal, podría decir o escribir el significado de “dos”, de la siguiente manera:

“cantidad que representa dos unidades”
“ocupa el segundo lugar de los enteros hacia la derecha del cero en la recta numérica”

Figura 2. 3. Registro escrito del número 2.

Entonces, por medio de la representación se puede codificar (forma como una información está representada) información, mientras más formas de representarlo se logre, se tendrá el dominio [conocimiento] del concepto. La representación conduce al aprendizaje del conocimiento y a su vez con este conocimiento se llevan a cabo otras representaciones en otros registros, estando presente siempre la objetivación lograda por el sujeto mediante las distintas representaciones semióticas de los conceptos. Entonces, la manipulación de representaciones con juegos de registros lleva al dominio del conocimiento de un concepto. Sin embargo, no es fácil llevar a cabo un determinado juego de registros, pues éste presenta obstáculos, tal como lo advierte Duval (1995):

El análisis del desarrollo de los conocimientos y de los obstáculos encontrados en los aprendizajes fundamentales relativos al razonamiento, a la comprensión de textos y a la adquisición de tratamientos lógicos y matemáticos, enfrenta *tres características que están estrechamente ligadas*. La primera es la **diversificación de los registros de representación semiótica** [negritas y cursivas en el original]. Estos son sistemas de representación diferentes entre sí; cada uno plantea preguntas específicas sobre el aprendizaje. (p. 30)

Pasar de un registro a otro no es fácil para el estudiante, por ejemplo, si se le presenta un registro gráfico y se le pide pasar al algebraico, como a continuación se

muestra. Ejemplo 1: de acuerdo con la siguiente gráfica, escribe la ecuación que le corresponde:

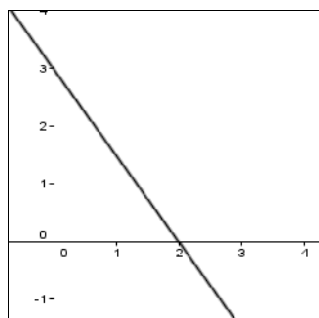


Figura 2. 4. Representación de una recta.

Ejemplo 2: represente en un sistema cartesiano la siguiente función lineal: $y = -\frac{3}{5}x + 2$.

Para el estudiante es más fácil de entender el segundo ejemplo que el primero, pues la enseñanza escolarizada pone énfasis en este tipo de tareas y se distingue [este tipo de enseñanza] por la utilización de representaciones oficiales, es decir, aquellas utilizadas en los libros de texto. La segunda característica es la **diferenciación entre representante y representado** (Duval, 1995, p. 30, negritas en el original) o, al menos, entre forma y contenido de una representación semiótica. Esta diferenciación generalmente está asociada con la comprensión de lo que una representación comunica y, por lo tanto, con la posibilidad de asociar otras representaciones y de integrarlas en los procedimientos de tratamiento. Ahora bien, una tal diferenciación jamás se adquiere de golpe, cualquiera que sea el registro de representación, o bien, del estadio de desarrollo Duval (1995).

Ejemplo 3: escribe qué representa cada expresión algebraica.

Tabla 2. 1. Ejemplo 3: Expresiones algebraicas

Expresión	Descripción posible
$x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$	
$x + y = \frac{1}{x + y}$	

En general, los estudiantes relacionan $x^2 + y^2$ con la circunferencia con radio cualquiera y centrada en el origen, sin embargo, la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ no es la representación simbólica de la circunferencia, sino que al hacer transformaciones algebraicas pertinentes se puede decir que se trata de la misma expresión simbólica con diferentes significados:

Tabla 2. 2. Más ejemplos de expresiones algebraicas

Expresión	Equivalencia	Significado posible
1 $x^2 + 2xy + y^2 = 1$	$(x + y)^2 = 1$	“el cuadrado de la suma de dos números es igual a uno.”
2 $x + y = \frac{1}{x + y}$	$(x + y) = \frac{1}{(x + y)}, x \neq y$	“una suma que tiene el mismo valor que su recíproca.”

En matemáticas, es pertinente diferenciar los significados de ecuación y de función, pues con frecuencia son confundidos en la enseñanza de estos conceptos. Esta afirmación puede ser fácilmente constatada al revisar cualquier libro de texto, de nivel secundaria, vigente en nuestro sistema educativo.

Tabla 2. 3. Expresiones algebraicas con sus significados posibles

Expresión	Significado posible
3 $2x + 6y = 18$	“Todos los posibles valores reales que puede tomar x y y para que su combinación lineal (cuyos coeficientes son 2 y 6, respectivamente) sea igual a 18.”
4 $y = -\frac{1}{3}x + 3$	“Representa la recta, donde hay una correspondencia de a cada valor de x le corresponde un solo valor de y .”

La complejidad asociada con las transformaciones semióticas de tratamiento, de una representación de un objeto matemático a otra es evidente, en tanto no sólo se cambia

el sentido asignado al objeto matemático, sino que estos no se articulan. “Las reglas de conversión no son las mismas según el sentido en el que se efectúa el cambio de registro” Duval (1995, p. 45). La tercera característica es la **coordinación entre los diferentes registros** [negritas en el original] de representación semiótica disponibles: el conocimiento de las reglas de correspondencia entre dos sistemas semióticos diferentes no es suficiente para que puedan ser movilizadas y utilizadas conjuntamente. El obstáculo mayor para la realización espontánea de esta coordinación es la importancia de las características de no-congruencia entre las representaciones producidas en los diferentes sistemas Duval (1995).

Otra dificultad a la que se enfrenta un estudiante es la operatividad de los registros; por ejemplo, al efectuar la adición de dos números en su forma decimal $0.5 + 0.5$, algunos ni se les ocurre pensar en la posibilidad de convertir la escritura decimal de un número en su escritura fraccionaria o en base 10. Llevar a cabo la adición –tomando en cuenta estas tres diferentes formas– conlleva al uso de tres registros diferentes de representación de números y por lo tanto la significación operatoria no es la misma, ya que la operatividad al sumar decimales es distinta de sumar fracciones y de sumar fracciones decimales.

Tabla 2. 4. Transformaciones en el mismo registro

Resultado de la adición		Comentario
$0.5 + 0.5$	$= 1$	Cada uno de los tres significantes tiene una significación operatoria diferente, sin embargo, representa el mismo número.
$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$	$\frac{2}{2} = 1$	
$50 \times 10^{-2} + 50 \times 10^{-2}$	$100 \times 10^{-2} = 1$	

2.2.1. Criterios de congruencia entre representaciones semióticas

Cuando una imagen –como la mostrada a continuación– carece de la línea de horizonte [entendida coloquialmente como "la horizontal"] es común que se refiera la posición de un objeto respecto al otro en la dimensión vertical “es el objeto más bajo el que sirve de anclaje para la aprehensión perceptiva de la imagen” Duval (1995, p. 49).

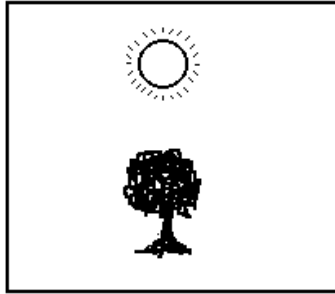


Figura 2. 5. Imagen con dos objetos en ausencia de la línea de horizonte [Horizontal]. Tomada de Duval (1995, p. 49).

De acuerdo con Duval (1995):

Esta imagen tiene cuatro unidades: las dos formas dibujadas y sus respectivas posiciones sobre el eje vertical. La descripción lingüística de esta imagen implica dos cosas. De una parte, el sujeto de la frase puede referirse tanto al objeto más alto como al objeto más bajo de la imagen. (p. 49)

A continuación, se discuten las posibles respuestas de la percepción de los objetos en la imagen. El Sol se identifica con la letra A y al árbol como B,” ” encima de y ” ” debajo de. Como hay ausencia de referencia, entonces se podría escribir cuatro diferentes frases: “el Sol está por encima del árbol”, “el Sol está debajo del árbol”, “el árbol está encima del Sol” y “el árbol está debajo del Sol”. Todas las posibles formas de percepción son conocidas como “unidad significativa simple”. Tomando como base este ejemplo, se identifica a continuación los tres criterios de congruencia de significados.

Primero, posibilidad de una correspondencia “semántica” de los elementos significantes de “a cada unidad significativa simple de una de las representaciones, se puede asociar una unidad significativa elemental” Duval (1995, p. 50).

Tabla 2. 5. Unidades de significación

Unidad significativa elemental	Unidad significativa simple
$A \wedge B$	$A \wedge B$
	$A \vee B$
	$B \wedge A$
	$B \vee A$

Segundo, univocidad semántica terminal “a cada unidad significativa elemental de la representación de salida, le corresponde **una única** [énfasis de la autora de esta tesis] unidad significativa elemental en el registro de la representación de llegada” Duval (1995, p. 50).

Tabla 2. 6. Otras unidades significantes

Unidad significativa elemental	Unidad significativa simple
$A \wedge B \Leftrightarrow$	$A \wedge B$
	$A \vee B$
Congruente con la imagen	$B \wedge A$
	$B \vee A$

Tercero, organización de las unidades significantes “las organizaciones respectivas de las unidades significantes de las dos representaciones comparadas, conduce a que las unidades en correspondencia semántica sean aprehendidas en el mismo orden en las dos representaciones” Duval (1995, pp. 50, 51).

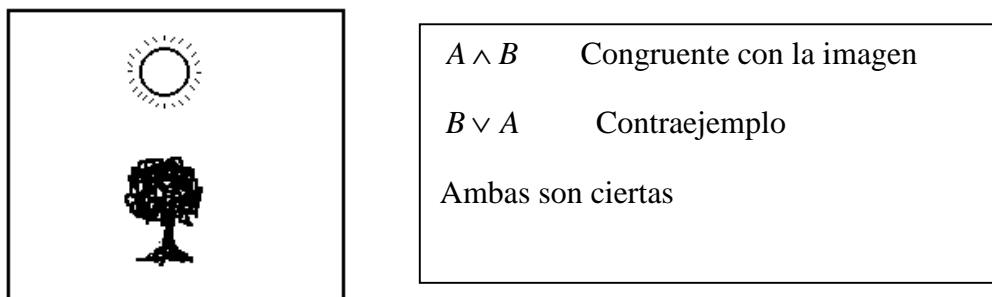



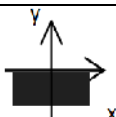
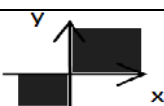
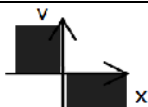
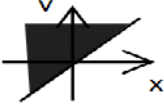
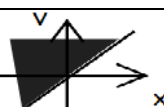
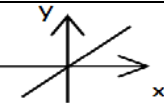
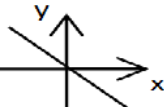
Figura 2. 6. Correspondencia semántica de las dos representaciones.

Estos tres criterios permiten determinar la congruencia de estas dos representaciones semióticamente diferentes y que, al menos parcialmente, representan el mismo contenido. Dos representaciones son congruentes cuando hay correspondencia semántica entre sus unidades significantes, univocidad semántica terminal y el mismo orden posible de aprehensión de estas unidades en las dos representaciones. Naturalmente, puede no haber correspondencia por ninguno de los tres criterios, por dos o solamente por uno. La no congruencia entre dos representaciones, por lo tanto, puede ser más o menos grande. La dificultad de la conversión de una representación depende del grado de no-congruencia entre la representación de salida y la representación de llegada (Duval, 1995, p. 51).

2.2.2. No congruencia y encapsulamiento

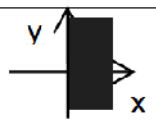
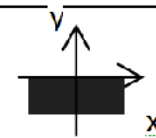
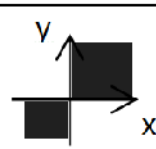
De acuerdo con los resultados presentados en la tabla 4-mostrada más adelante-, Duval (1995), la cual señala los resultados en porcentajes de 16 tareas de conversión entre tres diferentes registros de representación; expresión lingüística, expresión algebraica y expresión gráfica, elaboradas por estudiantes de 10° [décimo grado en Francia, corresponde a primer año de bachillerato en nuestro sistema educativo]. Las tareas consistían en lo siguiente: 1) leer la instrucción expresada textualmente y sombrear la zona correspondiente en un plano cartesiano, 2) se mostraba una zona sombreada en el plano cartesiano y se pide escribir la ecuación correspondiente. A continuación, se muestra la Tabla 1.7; en ella se muestran los resultados de estas conversiones de registros.

Tabla 2. 7. Muestra los resultados de 16 conversiones de registros. Tomada de Duval (1995, p. 56)

I	II	III	I → III sombrear	III → II escoger la expresión
1. ... el conjunto de puntos que tienen una abscisa positiva	$x > 0$		67%	51%
2. ... que tienen una ordenada negativa	$y < 0$		67%	61%
3. cuya abscisa y ordenada son del mismo signo	$xy \geq 0$		56%	25%
4. cuya abscisa y ordenada son de signos contrarios	$xy \leq 0$			23%
5. cuya ordenada es superior a la abscisa (estando trazada la recta $y = x$)	$y > x$		38%	38%
6. cuya ordenada es superior a la abscisa (sin estar trazada la recta $y = x$)	$y > x$		19%	25%
7. cuya ordenada es igual a la abscisa	$y = x$		60%	75%
8. cuya ordenada es opuesta a la abscisa	$y = -x$		34%	58%

En seguida, se comenta lo referente a los resultados de las conversiones de registros.

Tabla 2. 8. Resultados de las preguntas 1,2 y 3 de la tabla 4. Tomada de Duval (1995, p. 56)

I	II	III	I → III sombrear	III → II escoger la expresión
1. ... el conjunto de puntos que tienen una abscisa positiva	$x > 0$		67%	51%
2. que tienen una ordenada negativa	$y < 0$		67%	61%
3. cuya abscisa y ordenada son del mismo signo	$xy \geq 0$		56%	25%

En las preguntas 1, 2 y 3, cuyo objetivo era pasar del registro lingüístico al registro gráfico, se observa que fue más alto el porcentaje que al pasar del registro gráfico al registro de expresión algebraica. En las preguntas 1 y 2, las unidades significantes como: abscisa, ordenada, positivo y negativo, estaban relacionadas (identificadas) con las unidades significantes del plano cartesiano, por lo que la conversión cumplió con dos de las tres características de congruencia al pasar de la expresión lingüística a la expresión gráfica. Caso contrario, cuando se pasa del gráfico a la expresión algebraica, hay menos correspondencia semántica entre las unidades significantes de ambos registros, para la pregunta 1, el gráfico señala una semi-zona horizontal a la derecha de dos semi-zonas verticales y al pasarlo a la expresión algebraica se tendría que discriminar una de las dos variables visuales, entonces se toma la abscisa positiva que correspondería a $x > 0$.

Lo mismo sucedería para la pregunta 2 al pasar del registro gráfico al registro algebraico, se observa en el gráfico una semi-zona vertical, por debajo de dos semi-zonas horizontales, rechaza la variable visual abscisa (x) y se toma la variable visual ordenada (y) negativa que corresponde a $y < 0$. En las respuestas de la pregunta 3 se observa que también –como en las respuestas de las preguntas 1 y 2– fue más fácil pasar del registro lingüístico al gráfico, pero en un porcentaje menor debido a que la expresión “mismo signo” implica observar con cuidado los valores (positivo, negativo) de la abscisa y ordenada para ver las zonas en el plano cartesiano que cumplan esta consigna.

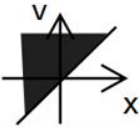
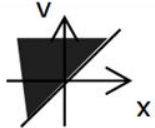
Cuando se cambia del registro gráfico al algebraico se observa que el porcentaje de aciertos fue menor al anterior ya que están involucradas ambas variables visuales y por lo tanto no se tiene una discriminación de variables visuales, entonces hay que observar el comportamiento de los signos de cada zona sombreada; en una zona son $(+)(+)>0$, en la otra zona se observa $(-)(-)>0$, entonces las unidades significativas se traducirían al lenguaje algebraico como $xy > 0$. Pero la expresión $xy \geq 0$ implica que hay que tomar en cuenta el cero, eso quiere decir que la zona sombreada pasa por el origen, lo que representa otra unidad significativa a reconocer.

Tabla 2. 9. Resultados de las preguntas 4 y 8 de la Tabla 4. Tomada de Duval (1995, p. 56)

I	II	III	I → III sombrear	III → II escoger la expresión
4. cuya abscisa y ordenada son de signos contrarios	$xy \leq 0$			23%
8. cuya ordenada es opuesta a la abscisa	$y = -x$		34%	58%

La pregunta 4 es similar a la 8, en la pregunta 4 no hubo respuesta correcta, la respuesta que se señaló fue $y = -x$, lo que significa que existió la no congruencia de las unidades significativas, seguramente al poner más atención a las palabras como *signos contrarios* para la pregunta 4 y *opuesta* para la pregunta 8, se hubiesen dado cuenta de que la unidad significativa de correspondencia en el registro gráfico para la pregunta 4 es: *cualquier punto en el plano cartesiano donde exista una coordenada cuya combinación de los signos sea siempre negativa*, esto implica marcar un área en el plano cartesiano y para la pregunta 8 sería: *un punto en el plano cartesiano donde el valor de la ordenada es opuesto a la abscisa*, representaría una colección de puntos ya que solo existe un opuesto para cada número.

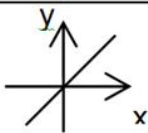
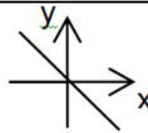
Tabla 2. 10. Resultados de las preguntas 5 y 6 de la Tabla 4. Tomada de Duval (1995, p. 56)

I	II	III	I → III sombrear	III → II escoger la expresión
5. cuya ordenada es superior a la abscisa (estando trazada la recta $y = x$)	$y > x$		38%	38%
6. cuya ordenada es superior a la abscisa (sin estar trazada la recta $y = x$)	$y > x$		19%	25%

En las preguntas 5 y 6 de las tareas de conversión, en las cuales consistían la misma expresión lingüística (misma instrucción), pero en una de ellas se mostraba en el plano cartesiano una recta y en la otra no se mostraba. En la conversión donde estaba la recta dibujada fue el mismo porcentaje tanto el pasar de la expresión lingüística a la gráfica como la conversión de expresión gráfica a expresión algebraica, la recta fue la unidad significativa de correspondencia en la cual se apoyaron además de otras.

Por último, en las respuestas a las preguntas 7 y 8, fue más alto el porcentaje al pasar de la representación gráfica a la expresión algebraica que pasar de la expresión lingüística a la expresión gráfica, justamente a la inversa de las pregunta 1, 2 y 3. Aquí se observa que la unidad significativa para la pregunta 7 está determinada por la relación del gráfico (variables visuales) y que se identifican en el registro algebraico. La diferencia en las respuestas de la pregunta 7 y 8, seguramente radica en que es inmediata la comprensión de la palabra **igual** a la comprensión de la palabra **opuesta**.

Tabla 2. 11. Resultados de las preguntas 7 y 8 de la Tabla 4. Tomada de Duval (1995, p. 56)

I	II	III	I → III sombrear	III → II escoger la expresión
7. cuya ordenada es igual a la abscisa	$y = x$		60%	75%
8. cuya ordenada es opuesta a la abscisa	$y = -x$		34%	58%

En el proceso de la conversión es importante que las expresiones algebraicas (simbólicas) deban ser descritas y no deletreadas. También, el desconocimiento de uno de los dos registros de representación agudiza la dificultad de la tarea, y es conveniente discriminar las variables visuales al llevar a cabo la conversión.

Para efectuar esta discriminación, hace falta, en efecto, recurrir a una interpretación global que requiere de haber resaltado los diferentes valores posibles de las variables visuales pertinentes en el registro gráfico, y haberlos puesto en relación con los símbolos correspondientes en la escritura algebraica. (Duval, 1988c, pp. 239-240)

Dicho de otra manera, "las reglas de conversión no son las mismas según el sentido en el que se efectúa el cambio de registro" (Duval, 1995, p. 45). Este mismo autor agrega:

No sólo el cambio de registros ocasiona obstáculos que son independientes de la complejidad del campo conceptual en el que se trabaja; también la ausencia de coordinación entre los diferentes registros produce con mucha frecuencia un *handicap* para los aprendizajes conceptuales. (Duval, 1995, p. 46).

Más adelante, en este mismo artículo, Duval (1995) agrega lo siguiente:

Se podría pues creer que las dificultades debidas a la no-congruencia son un fenómeno secundario. En realidad, tal visión es engañosa puesto que *los fracasos debidos a la no-congruencia revelan un encapsulamiento de los registros de representación*. Este encapsulamiento persiste incluso después de que una enseñanza, aparentemente haya movilizado diferentes registros de representación. (p. 58)

2.3. Recapitulación sobre el papel de las representaciones semióticas

No puede haber comprensión matemática, por parte de los estudiantes, si no logran distinguir un objeto de su representación, pues este mismo objeto matemático puede darse a través de representaciones diferentes, por lo cual se puede perder la comprensión. Así, no sólo hay que enfocarse en las expresiones algebraicas [simbólicas] al momento de la resolución de problemas, sino que además se debe prestar más atención en los grandes detalles como las interpretaciones de cada una de las formas en que se presente la expresión. Duval (1995) ha argumentado que se llega al dominio del concepto siempre y cuando esté involucrada la objetivación por parte del individuo; de esta forma, se puede tener operatividad entre los registros (algebraico, gráfico, textual, tablas).

Los obstáculos debidos a las conversiones de un registro a otro, por parte de los estudiantes, se dan por la no congruencia de las unidades significativas entre las diferentes representaciones. Identificar la corresponsabilidad entre ellas, mantener el significado en cada una de las representaciones no es tarea fácil, pues requiere de un razonamiento que lleva al dominio del objeto matemático en su forma de concepto.

La parte teórica a tomar en cuenta –en este trabajo– está estrechamente relacionada con las representaciones semióticas usadas en el sentido de Duval (1995). A lo largo de este capítulo se ha discutido el papel que éstas tienen tomando en cuenta los tres usos que este autor resalta: a) como medios de comunicación, b) como partes constitutivas de la objetivación del conocimiento matemático, c) como elementos importantes en la conversión de los registros utilizados. Las representaciones semióticas a utilizar en este trabajo serán tomadas [o diseñadas] de los libros de texto de matemáticas utilizados en los sistemas educativos de los niveles medio y superior; y los resultados del aprendizaje promovidos por las Actividades se analizarán de acuerdo con los aspectos señalados en las siguientes tablas.

Representación Distinguir claramente el contenido de la representación y el objeto representado	Unidades significantes (código) Características particulares de los objetos matemáticos que ayudan en la comparación de dos registros diferentes
Tratamiento Transformación estrictamente interna en un registro	
Conversión Pasar de un registro a otro	
Sustentado en la objetivación	

Figura 2.7. Tres características esenciales en la interpretación de un concepto.

Tabla 2. 12. Tres maneras de ver los gráficos cartesianos, p. 67: "Problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo" (Duval, 2001)

Tres maneras de VER	Lo que es OBSERVADO	Lo que es IDENTIFICADO
I Aprehensión LOCAL POR PUNTEO (sólo se retienen puntos considerados aisladamente)	Asociaciones (puntos, pareja de números)	Una asociación entre dos valores numéricos. La regla de construcción es una regla de codificación: un punto de intersección sobre un plano cuadrículado según dos ejes graduados (la figura al fondo) corresponde a una pareja de números.
II Aprehensión ICÓNICA (la imagen de una tendencia)	Desplazamientos de subida o de bajada en relación con un nivel horizontal	Una analogía con cambios de posición en el espacio físico real (estar más alto, más bajo), relieve

<p style="text-align: center;">III</p> <p style="text-align: center;">Aprehensión GLOBAL CUALITATIVA</p> <p style="text-align: center;">(se trata de poder discriminar las características de dos grafos de la misma forma o no)</p>	<p>Formas D1(rectas curvas) o D2 (zonas) que tienen características figurales intrínsecas y características extrínsecas: orientación en relación con los dos ejes, y posición (intersección) en relación a los ejes.</p> <p>Un grafo en la figura que se destaca de la figura-fondo de los ejes</p>	<p>Una relación entre dos variables definidas sobre dos conjuntos de valores</p>
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------

La información precedente conduce al hecho de que en el diseño de las Actividades aparecerán *representaciones oficiales*, y no cualquier tipo de representación semiótica. Se llama representación oficial a aquella que surge de las matemáticas escolares; sobre todo, de los libros de texto utilizados en la enseñanza escolarizada.

2.4. Unidades Significantes

Las unidades significantes son características particulares de los objetos matemáticos que ayudan en la comparación de dos registros diferentes. En seguida, se discute el significado de esta aseveración tratando de clarificarla mediante algunos ejemplos. Esta parte es fundamental de la teoría de las representaciones de Duval (1995), y sirve como base en el análisis de los datos surgidos de este trabajo.

2.4.1. Conversión de Registro Textual a Registro Gráfico

Cuando se cambia del registro textual al registro gráfico, se tiene que prestar atención a las instrucciones del texto y pasar los datos a un plano cartesiano. Por lo general, la *lectura* de textos indica las coordenadas de la posición y tiempo o de la velocidad y aceleración de cualquier objeto en movimiento. Es común que en los libros de texto utilizados en la enseñanza de estos tipos de movimientos de objetos, se comience con la gráfica de la

trayectoria descrita por un móvil, seguida de la gráfica de la velocidad y, por último, la gráfica de la aceleración.

Una vez que se obtienen las *coordenadas* (unidades significantes), se utilizan como *puntos* (unidades significantes) que al unirlos van formando el *desplazamiento* (unidad signficante) en distintos *periodos* (unidades significantes) y se obtiene la gráfica de la distancia recorrida de la partícula [móvil]. Si es un movimiento uniforme no acelerado, entonces, la unión de los puntos es una *recta* (unidad signficante), de modo que la ruta probable a seguir con la señalización de las unidades significantes para graficar la posición respecto al tiempo en un movimiento con velocidad constante. Lo dicho en las líneas precedentes, puede ser resumido en el siguiente esquema [ruta probable]:

lectura → posición → tiempo → coordenadas → Recta

En un movimiento acelerado, la ruta probable a seguir para graficar la posición respecto al tiempo de un móvil es la siguiente:

lectura → posición → tiempo → coordenadas → Parábola

Para graficar el *comportamiento* de la *velocidad* (unidad signficante) es necesario tomar datos en la lectura del texto, pero es fundamental observar la *pendiente* (unidad signficante) para el movimiento con velocidad constante— de la gráfica del *comportamiento* de la distancia recorrida o desplazamiento para el movimiento del móvil con aceleración constante, y usar la *fórmula de la pendiente* (unidad signficante), análoga a la *fórmula de la velocidad media* (unidades significantes). Entonces, la ruta probable a seguir con la señalización de las unidades significantes para graficar la velocidad respecto al tiempo en un movimiento con velocidad constante es la siguiente:

lectura → coordenadas → sin pendiente → ecuación Recta (vel. constante)

La ruta probable a seguir con la señalización de las unidades significantes para graficar la velocidad respecto al tiempo, en un movimiento con aceleración constante, es la siguiente:

lectura → coordenadas → pendiente → ecuación Recta(accel. constante)

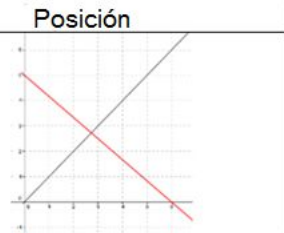
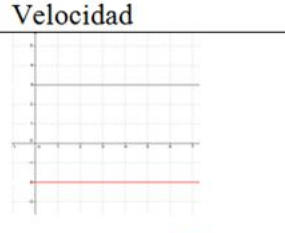
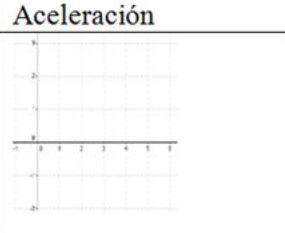
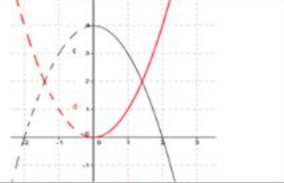
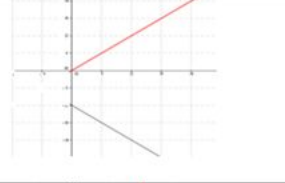
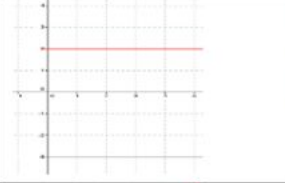

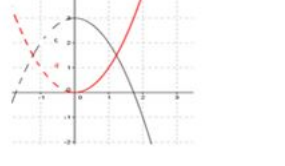
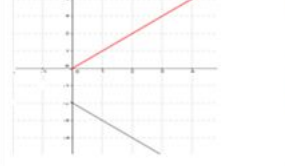
Para graficar la aceleración respecto al tiempo la ruta probable a seguir con la ayuda de las unidades significantes son las siguientes: la primera es para una aceleración constante y la segunda para una aceleración variable.

lectura → *cooedenadas* → *sin pendiente* → *ecuación Recta(ace. cte,)*

lectura → *coordenadas* → *pendiente* → *ecuación Recta(ace. variable)*

A continuación, se muestra la Figura 2.14 con las diferentes representaciones cartesianas y distintos tipos de movimientos de un móvil.

Tabla 2. 13. Representaciones cartesianas respecto al tiempo y distintos tipos de movimientos de un móvil

Posición	Velocidad	Aceleración	Tipo de movimiento
			Movimiento Uniforme $v=\text{constante}$ $a=0$
			Movimiento Acelerado $a=\text{constante}$ $v=\text{variable}$
			Movimiento con Aceleración variable $a=\text{variable}$ $v=\text{variable}$

Como se observa en las gráficas precedentes, todas las representaciones (posición, velocidad y aceleración) respecto al tiempo sólo ocupan el primero y cuarto cuadrantes, ya que la abscisa representa el tiempo, entonces los valores del eje x siempre son positivos. La representación de la posición, la velocidad y aceleración, en ocasiones pueden pasar de un cuadrante a otro [del primero al cuarto o viceversa]. Es común representar los tres conceptos mencionados anteriormente como positivo al moverse hacia la derecha, es decir de “ida” (pendiente positiva) y como negativo al moverse hacia la izquierda, es decir de “regreso” (pendiente negativa). En el movimiento vertical son similares la convención de signos, cuando se dirige hacia arriba se toma como positivo y negativo cuando se dirige hacia abajo, en este tipo de movimiento cuando se lanza un objeto desde el suelo y regresa

al suelo, la abscisa representa el suelo y entonces la gráfica solo es válida para el primer cuadrante.


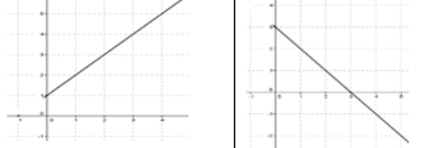
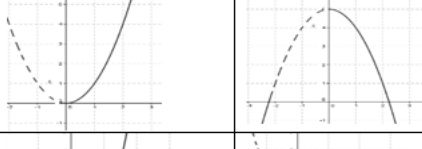

Si se trata de un movimiento acelerado, entonces la función que describe la posición del móvil, por lo general, es cuadrática nunca lineal y si se trata de un movimiento uniforme [velocidad constante], entonces la función que describe la posición es lineal.

2.4.2. Conversión de Registro Gráfico a Registro Algebraico

Partir de una representación gráfica a la conversión tendiente a obtener una representación algebraica implica apoyarse en unidades significantes visuales, como: la abscisa, ordenada, puntos donde la función corta a los ejes, la inclinación de una recta, las coordenadas de los segmentos de una recta, el vértice de una parábola o el punto de inflexión de una función cúbica, entre otras. Detectar si existe traslación de una función es uno de los aspectos importantes al *ver* un gráfico. Una vez observadas las unidades significativas, el siguiente paso es trasladar los datos observados a las ecuaciones conocidas como de la recta o parábola. Los pasos probables para llevar a cabo la conversión de estos tipos de registros son: *observar* → *detectar* → *trasladar* → *ecuaciones*.

A continuación, se presenta la Tabla 2.14, en la que se relaciona el gráfico con su probable expresión algebraica.

Tabla 2. 14. Gráfico con su probable expresión algebraica

Gráficos		Ecuaciones	
		$y = \pm k$	Recta
		$(y - k) = \pm m(x - h)$ $y = \pm mx + b$	Recta
		$(y - k) = \pm a(x - h)^2$ $ax^2 + bx + c = 0$	Parábola $a \neq 0$
		$(y - k) = \pm a(x - h)^3$	Cúbica $a \neq 0$

Para determinar la ecuación de la recta, se toman dos pares ordenados de puntos en el plano (unidades significantes) y se utiliza la ecuación de la pendiente (unidad significante) para conocer el valor de m . Otra unidad significante podría ser el par ordenado donde la recta corta a los ejes. Con todos estos datos visuales, se sustituye en la ecuación general de la recta $y = mx + b$ y se conoce la expresión algebraica de la gráfica; siendo ésta una recta.

Cuando se trata de una parábola, hay tres formas de conocer la ecuación algebraica asociada a ella. La primera, si la parábola corta al eje de las x : se localizan sus raíces x_1 y x_2 , así como las coordenadas del vértice. Estos datos [los tres puntos ya localizados] se sustituyen en la ecuación de la parábola [forma estándar] y el valor de a se obtiene con la siguiente expresión $a = \frac{c}{x_1 x_2}$, siendo c el punto donde la parábola corta al eje y .

La segunda forma es usando la ecuación cuadrática; se toman tres pares ordenados cualesquiera de la gráfica y se sustituyen en la ecuación cuadrática. Al hacer esta sustitución, se obtiene como resultado un sistema lineal de ecuaciones de tres por tres [tres ecuaciones con tres incógnitas]. Una vez conocidos los valores de a, b y c se sustituyen en la ecuación de la forma $ax^2 + bx + c$ y se conoce la expresión algebraica. La tercera forma

es la más simple siempre y cuando la parábola corte al eje x , y que se conozcan sus raíces x_1 y x_2 para factorizarla de la forma $(x - x_1)(x - x_2) = 0$. Desarrollando el producto anterior, se conoce la ecuación de la forma $ax^2 + bx + c$.

Para encontrar la ecuación de una gráfica cúbica, se toman los valores de sus tres raíces x_1 , x_2 y x_3 y factorizarla de la forma $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$, desarrollando el producto anterior se conoce la ecuación de la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d$, siempre y cuando la gráfica interseque tres veces al eje x . Si ello no sucede, entonces se pueden elegir cualesquiera cuatro puntos de la cúbica, sustituir esos puntos en la ecuación general, y resolver el sistema de ecuaciones obtenido una vez hecha tal sustitución de esos puntos.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

3.1. Introducción

Esta investigación se llevó a cabo con siete estudiantes de ingeniería, quienes requerían asesorías en la materia de Mecánica II (dinámica), mediante un convenio verbal entre el maestro de la materia de Mecánica II y la responsable de la presente investigación. Al inicio de la toma de datos se comenzó con 14 estudiantes y al término de la implementación de las Actividades se contaba con siete estudiantes, de los cuales cuatro tuvieron una asistencia de 100% y seis de ellos una asistencia irregular (entre el 40 y 70%) y los demás sólo asistieron a una asesoría. La duración de la fase experimental fue de siete semanas con un total de 24 horas de asesorías, es decir, un promedio de tres horas semanales. En seguida, se da más información en torno a los participantes en este estudio.

3.2. Participantes

La edad de los participantes oscilaba entre 19 y 26 años. Cuatro de ellos cursaban el cuarto semestre, seis el sexto semestre, tres el octavo semestre y uno el décimo semestre. Cinco de ellos habían reprobado la materia de física y uno la materia de Mecánica II. Todos los alumnos eran estudiantes de la licenciatura de Ingeniería en Sistema de Energías en la Universidad de Quintana Roo en la ciudad de Chetumal.

3.3. Conceptos discutidos en este trabajo y que forman parte del currículo escolar

Sin apartarse del currículo escolar, en este trabajo se discutió con los estudiantes los conceptos que se enlistan a continuación. Para cada uno de ellos, se da la definición de acuerdo con los libros de texto utilizados para su enseñanza, y la forma en la que los autores los ejemplifican. Se pretende, con esta información, tener clara la información dada por los estudiantes y qué tan cerca o lejos queda o quedaron de la Objetivación de los conceptos institucionales [de la física] discutidos con ellos. En seguida, se enlistan tales conceptos.

- (a) Sistema de Referencia Inercial,
- (b) Distancia recorrida,

- (c) Desplazamiento,
- (d) Trayectoria, rapidez,
- (e) Rapidez media,
- (f) Rapidez instantánea,
- (g) Velocidad,
- (h) Velocidad media,
- (i) Velocidad instantánea,
- (j) Aceleración,
- (k) Aceleración media y
- (l) Aceleración instantánea.

En seguida, se dan las definiciones de los conceptos precedentes tomadas de los libros de texto; las referencias de donde fueron tomadas.

3.3.1. Sistema de Referencia Inercial

En general, medimos nuestro movimiento respecto a los objetos que esperamos permanezcan en reposo. Si esos objetos están fijos a la superficie del planeta, nuestro marco de referencia es la Tierra: posición, velocidad y aceleración se miden respecto a ese marco. (Griffith, 2014, p. 425)

La definición de un marco de referencia inercial parece muy sencilla: es el que no está acelerado [...] El problema se debe a la aparente imposibilidad de establecer un marco de referencia que esté absolutamente en reposo, o al menos no acelerado en algún sentido. (Griffith, 2014, p. 428)

Cualquier medición de posición, distancia o rapidez debe hacerse respecto a un **marco de referencia** [...] al especificar el movimiento de un objeto, es importante indicar no sólo la rapidez, sino también la dirección del movimiento. A menudo podemos indicar una dirección usando los puntos cardinales, norte, este, sur y oeste y con las instrucciones "hacia arriba" y "hacia abajo". En física solemos dibujar un conjunto de ejes coordenados [...] Para representar un marco de referencia. Siempre podemos colocar el origen 0, y los sentidos de los ejes x y y , como queramos por comodidad. Los ejes x y y son siempre perpendiculares entre sí.

Los objetos situados a la derecha del origen de coordenadas (0) sobre el eje x tienen una coordenada x que consideramos positiva; entonces los puntos a la izquierda del 0 tienen

una coordenada x negativa. La posición a lo largo del eje y se considera usualmente positiva arriba del cero y negativa abajo del 0, aunque la convención contraria puede usarse si así conviene. Cualquier punto sobre el plano puede ser especificado dando las coordenadas x y y . "Para el movimiento unidimensional, escogemos a menudo el eje x como la línea a lo largo de la cual tiene lugar el movimiento. La posición de un objeto en cualquier momento está entonces dada por su coordenada x . (Giancoli, 2002, p. 17)

Es útil graficar la posición x como función del tiempo. Se acostumbra considerar el tiempo t como la variable independiente y medirla a lo largo del eje horizontal (abscisa); la posición x , la variable dependiente, se mide a lo largo del eje vertical (ordenada). (Giancoli, 1997, p. 37)

La descripción matemática del movimiento de un objeto requiere un método para describir la posición del objeto en diferentes tiempos. Esta descripción se realiza mediante el uso de coordenadas [...] donde los ejes horizontal y vertical se cruzan en un punto que se considera el origen. Las coordenadas cartesianas también se llaman *coordenadas rectangulares*. (Serway, 2002, p. 59)

Si la tangente a la curva $x-t$ sube hacia la derecha [...] su pendiente es positiva, y el movimiento es en la dirección $+x$. Si la tangente baja hacia la derecha, la pendiente y la velocidad son negativas y el movimiento es en la dirección $-x$. Si la tangente es horizontal, la pendiente y la velocidad son 0. (Sears, 1999, p. 36)

3.3.2. Distancia recorrida

Cantidad escalar [...] El odómetro muestra que el automóvil ha recorrido en realidad una distancia escalar [...] es la suma aritmética de las cantidades escalares s_1 y s_2 . (Tippens, 2011, p. 46)

3.3.3. Desplazamiento

El desplazamiento de una partícula se define como el cambio en su posición. (Serway, 2002, p. 24)

El *vector de desplazamiento* $\vec{\Delta r}$, se define como el cambio de posición que se realiza en este intervalo. (Resnick, 2002, p. 18)

Desplazamiento, que se define como el *cambio de posición* del objeto. Es decir, el desplazamiento muestra qué tan lejos está el objeto desde el punto de inicio [...] El desplazamiento es una cantidad que tiene magnitud y dirección. (Giancoli, 2002, p.17)

El desplazamiento es una cantidad vectorial [...] La distancia es una cantidad escalar. (Tippens, 2011, p. 46)

3.3.4. Trayectoria

El camino de un proyectil, al que se llamará *trayectoria*, siempre es una parábola. (Serway, 2002, p. 82)

El camino que sigue un proyectil es su **trayectoria** [...] Un **proyectil** es cualquier cuerpo que recibe una velocidad inicial y luego sigue una trayectoria determinada totalmente por los efectos de la aceleración gravitacional y la resistencia del aire. (Sears, 1999, p. 68)

Si no hubiera gravedad podrías lanzar una roca hacia el cielo, y seguiría una trayectoria recta. Sin embargo, debido a la gravedad, la trayectoria describe una curva....Una roca que se arroja, una bala de cañón o cualquier objeto que se lanza por cualquier método y continúa moviéndose por su propia inercia se llama **proyectil**. (Hewitt, 2007, p. 184)

Las distancias verticales recorridas son las mismas que si tan sólo se dejara caer la pelota. Observa que la curvatura de la trayectoria de la pelota es la combinación del movimiento horizontal, que permanece constante, y el movimiento vertical, que tiene la aceleración debida a la gravedad. Hewitt, 2007, p. 186)

Si no hubiera gravedad, la bala seguiría la trayectoria rectilínea que indica la línea punteada. (Hewitt, 2007, p. 187)

Si combinamos los movimientos horizontal y vertical obtenemos la trayectoria. (Griffith, 2014, p. 47)

3.3.5. Rapidez

La rapidez es un escalar, pues no contiene información direccional. (Resnick, 2002, p. 19)

El término "rapidez" [comillas en el original] se refiere a qué tan lejos viaja un objeto en un intervalo dado de tiempo, independientemente de la dirección. (Giancoli, 2002, p. 18)

La **rapidez** se define como *longitud* por unidad de tiempo y se puede expresar en *metros por segundo* (m/s), *pies por segundo* (ft/s) u otras unidades [cursivas y negritas en el original]. (Tippens, 2011, p. 43)

Rapidez como la distancia recorrida por unidad de tiempo. (Hewitt, 2007, p. 41)

Rapidez qué tan rápido se mueve algo: la distancia que recorre un objeto por unidad de tiempo. (Hewitt, 2007, p. 53)

3.3.6. Velocidad

Velocidad la rapidez de un objeto y una especificación de la dirección de su movimiento. (Hewitt, 2007, p. 53)

¿Cuál es la diferencia entre rapidez y velocidad? [...] Si dices que un objeto se mueve a 15 m/s habrás proporcionado su *rapidez*. Si dices que se desplaza con dirección al oeste a 15 m/s, habrás dado su *velocidad* [cursivas en el original]. (Griffith, 2014, p. 23)

Lo más importante es que el término **velocidad** se usa para representar tanto la *magnitud* (el valor numérico) de la rapidez con que se mueve un objeto, como la *dirección* en la que se mueve [cursivas en el original]. (Giancoli, 1997, p. 21)

La velocidad de una partícula también puede obtenerse de la gráfica de la posición de la partícula en función del tiempo. (Sears, 1999, p. 36)

Una mirada a la gráfica muestra que la distancia no cambia durante ese intervalo de tiempo; por tanto, el carrito *no* se movió. La velocidad es cero durante ese tiempo, lo cual se representa por medio de una línea horizontal en nuestra gráfica de la distancia contra tiempo. (Griffith, 2014, p. 28)

Es útil recordar que *sólo* el signo de la velocidad se determina por la dirección del movimiento. El del desplazamiento depende de la ubicación o la posición del objeto, en tanto que el de la aceleración queda determinado por la fuerza que hace que la velocidad cambie. (Tippens, 2011, p. 119)

3.3.7. Rapidez media

La **rapidez media** de un automóvil [...] es función únicamente de la distancia registrada en su odómetro y del tiempo requerido para realizar el viaje. En lo que se refiere a los

cálculos, no hay ninguna diferencia, ya sea que el conductor del automóvil haya tomado la ruta directa o la panorámica, o incluso si tuvo que detenerse a comer. (Tippens, 2011, p. 112)

La rapidez media es igual a la distancia recorrida dividida entre el tiempo de viaje. La rapidez media que acabamos de definir es la **razón** a la que se recorre la distancia en el tiempo. (Griffith, 2014, p. 19 y 20)

La rapidez promedio de una partícula, una cantidad escalar, se define como el cociente entre la distancia total recorrida y el tiempo total que lleva viajar esa distancia. (Serway, 2002, p. 27)

Conviene precisar que la rapidez promedio generalmente no se relaciona con la magnitud de la velocidad promedio. (Resnick, 2002, p. 19)

En general la rapidez promedio de un objeto se define como *la distancia total viajada a lo largo de su trayectoria dividida entre el tiempo que le toma viajar esta distancia* [...] La rapidez promedio y la velocidad promedio tienen la misma magnitud cuando todo el movimiento es en una dirección. En otros casos, ellas pueden diferir. (Giancoli, 2002, p. 18)

Esta diferencia entre la rapidez y la magnitud de la velocidad ocurre en algunos casos, pero sólo para los valores *promedio*. (Giancoli, 2002, p. 19)

Como la rapidez media es la distancia total recorrida dividida entre el tiempo total del recorrido, no indica las diversas rapidezces ni sus posibles variaciones durante intervalos de tiempos más cortos. En la mayoría de nuestros viajes avanzamos con varias rapidezces, de manera que la rapidez media es muy distinta de la rapidez instantánea. (Hewitt, 2007, p. 42)

Su rapidez promedio durante este intervalo es el promedio de sus rapidezces inicial y final. (Hewitt, 2007, p. 50)

3.3.8. *Velocidad media*

La velocidad promedio de una partícula se define como el desplazamiento de la partícula, dividido entre el intervalo de tiempo, durante el cual ocurre el desplazamiento. (Serway, 2002, p. 26)

La *velocidad promedio* en un intervalo, es el desplazamiento (cambio de posición) dividido entre el intervalo temporal durante el cual ocurre el desplazamiento. (Resnick, 2002, p. 18)

La velocidad media depende sólo del desplazamiento total que ocurre durante el intervalo, no de los detalles de lo que sucede dentro de ese intervalo. (Sears, 1999, p. 33)

La velocidad media de una partícula durante un intervalo de tiempo no nos dice con qué rapidez, o en qué dirección, se mueve la partícula en un instante dado del intervalo. (Sears, 1999, p. 34)

La *velocidad* media, sin embargo, debe tomar en cuenta la magnitud y la dirección del desplazamiento. (Tippens, 2011, p. 113)

La velocidad media de un objeto se determina igual que el promedio aritmético de dos números. Dadas una velocidad inicial y una final. (Tippens, 2011, p. 115)

3.3.9. Rapidez instantánea

Si queremos saber a qué rapidez nos movemos en un instante específico, miramos el velocímetro, que indica la **rapidez instantánea**. (Griffith, 2014, p. 21)

Una descripción más completa de la variación de la rapidez de un automóvil durante cierto tramo del viaje podría proporcionarse mediante una gráfica como la que se muestra en la figura 2.4, donde cada punto representa la rapidez instantánea en el tiempo, indicado en el eje horizontal. (Griffith, 2014, p. 21)

La rapidez instantánea es la razón a la que se recorre la distancia en un instante específico. Se obtiene calculando la rapidez media en un intervalo de tiempo muy breve, en el que la rapidez no cambia de forma considerable. La rapidez instantánea se relaciona íntimamente con el concepto de rapidez media. (Griffith, 2014, p. 21)

La rapidez instantánea de una partícula se define como la magnitud de su velocidad. (Serway, 2002, p. 29)

3.3.10. Velocidad instantánea

Velocidad instantánea es una cantidad vectorial de igual tamaño que la rapidez instantánea en un instante específico y con una dirección que corresponde a la del movimiento del cuerpo en ese instante. (Griffith, 2014, p. 24)

La **pendiente** de la curva de distancia contra tiempo en cualquier punto de la gráfica es igual a la *velocidad instantánea* del carrito. La pendiente indica cuán rápido cambia la distancia en cualquier instante. La razón de cambio de la distancia respecto al tiempo es la rapidez instantánea. (Griffith, 2014, p. 28)

Como el movimiento ocurre a lo largo de una línea recta, podemos representar la dirección de la velocidad con un signo menos o un signo más. Sólo hay dos posibilidades: hacia delante o hacia atrás. Así que tenemos la velocidad instantánea, que implica tanto el tamaño (rapidez) como la dirección del movimiento Una pendiente pronunciada hacia arriba representa una velocidad instantánea grande; una pendiente igual a cero (línea horizontal) indica una velocidad de cero, y una pendiente hacia abajo denota una velocidad negativa (hacia atrás). Al mirar la pendiente de la gráfica sabremos todo lo que necesitamos respecto a la velocidad del carrito. (Griffith, 2014, p. 28)

La velocidad instantánea, es igual al valor límite del cociente $\Delta x/\Delta t$ conforme Δt se acerca a cero. (Serway, 2002, p. 28)

[L]a **velocidad instantánea** en cualquier momento se define como *la velocidad promedio sobre un intervalo infinitesimalmente corto de tiempo* [...] Nótese que la rapidez instantánea siempre es igual a la magnitud de la velocidad instantánea. ¿Por qué? porque la distancia y el desplazamiento resultan iguales cuando ellas son infinitesimalmente pequeños. Si un objeto se mueve con velocidad uniforme (es decir, constante) en un intervalo de tiempo particular, su velocidad instantánea en cualquier instante es la misma que su velocidad promedio. Pero en muchas situaciones este no es el caso. (Resnick, 2002, p. 20)

La definición de la velocidad instantánea (ecuación 2-3) es el valor límite de la velocidad promedio cuando Δt tiende a cero. Entonces, *la velocidad instantánea es igual a la pendiente de la tangente a la curva* en ese punto. (Resnick, 2002, p. 21)

[E]l concepto de *velocidad instantánea*, que es la velocidad en cualquier momento [...] la **velocidad instantánea** en cualquier momento se define como la *velocidad media en un intervalo de tiempo infinitamente corto*. (Giancoli, 1997, p. 22)

En una gráfica de posición en función del tiempo para un movimiento rectilíneo, la velocidad instantánea en cualquier punto es igual a la pendiente de la tangente a la curva en ese punto. (Sears, 1999, p. 34)

La velocidad instantánea es una cantidad vectorial que representa la velocidad v_i en cualquier punto C. Es en consecuencia, la razón de cambio del desplazamiento respecto al tiempo. (Tippens, 2011, p. 113)

[L]a velocidad constante implica *tanto* rapidez constante *como* dirección constante. Esta última es una recta: la trayectoria del objeto no describe una curva. Por consiguiente, velocidad constante significa movimiento en una recta a rapidez constante.... Si la rapidez o la dirección cambian (o si ambas lo hacen), entonces cambia la velocidad. Por ejemplo, un automóvil que describe un círculo tiene rapidez constante, pero como su dirección cambia, su velocidad no es constante. (Hewitt, 2007, p. 44)

3.3.11. Aceleración

La aceleración es la razón a la que *cambia* la velocidad (observa que dijimos velocidad no rapidez) y tiene relevancia central en la teoría de Newton del movimiento..... La razón de cambio en la velocidad podría entonces calcularse dividiendo el tamaño del cambio en la velocidad entre el tiempo requerido para producirlo. (Griffith, 2014, p. 25)

La aceleración se refiere al cambio de velocidad, lo cual significa que puede tratarse de un incremento o una disminución de la rapidez. (Tippens, 2011, p. 115)

[L]a aceleración no es tan sólo el cambio total de la velocidad: es la *razón de cambio* de la velocidad con respecto al tiempo, o el *cambio de velocidad por segundo*. (Hewitt, 2007, p. 45)

Aceleración razón con la que cambia la velocidad de un objeto con el paso del tiempo; el cambio de velocidad puede ser en la magnitud, en la dirección o en ambas. (Hewitt, 2007, p. 53)

Lo que hace tan complicada a la aceleración es que es una *razón de cambio de una razón de cambio* [...] La aceleración no es velocidad, ni siquiera es un cambio de velocidad. La aceleración es la razón de cambio con la que cambia la velocidad misma. (Hewitt, 2007, p. 51)

3.3.12. Aceleración media

La aceleración media se determina dividiendo el cambio total en la velocidad entre cierto intervalo de tiempo entre ese intervalo de tiempo, y se desprecian las posibles diferencias en la razón de cambio de la velocidad que podrían ocurrir dentro del intervalo de tiempo [...] La aceleración media es el cambio en la velocidad dividido entre el tiempo requerido para producirlo. (Griffith, 2014, p. 25)

La aceleración promedio de la partícula se define como el *cambio* en velocidad Δv dividido entre el intervalo Δt durante el cual ocurrió dicho cambio. (Serway, 2002, p. 30)

La **aceleración promedio** se define como el cambio en la velocidad dividido entre el tiempo que toma efectuar este cambio. (Giancoli, 2002, p. 23)

3.3.13. Aceleración instantánea

La aceleración instantánea es la razón a la que cambia la velocidad en un instante concreto. Se obtiene calculando la aceleración media en un intervalo de tiempo muy breve, durante el cual la aceleración no cambia de manera perceptible. (Griffith, 2014, p. 26)

La aceleración instantánea es igual a la derivada de la velocidad respecto del tiempo. (Serway, 2002, p. 31)

La **aceleración instantánea** a se define como el valor límite de la aceleración promedio cuando Δt tiende a cero. (Giancoli, 2002, p. 25)

La aceleración instantánea es el límite de la aceleración media cuando el intervalo de tiempo tiende a 0. En el lenguaje del cálculo, la aceleración instantánea es la razón instantánea de cambio de la velocidad con el tiempo [cursivas en el original]. (Sears, 1999, p. 38)

3.4. Diseño de Actividades

Se diseñaron 11 Actividades para ser resueltas en lápiz y papel y otra Actividad para ser respondida en forma oral. Los contenidos de ellas [las Actividades] se desprenden de la consideración de los conocimientos adquiridos en el nivel medio superior que de acuerdo con el programa nacional de estudio del tercer semestre en la materia de Física I, los estudiantes en el bloque II deben:

[C]onocer los conceptos relacionados con el movimiento de los objetos como: posición, movimiento, distancia, desplazamiento, rapidez, velocidad y aceleración haciendo uso de un plano [...] Analizar las gráficas de desplazamiento-tiempo y velocidad-tiempo. (Serie programa de estudio 2013, Dirección General de Bachillerato, Secretaría de Educación Pública)

Así como los contenidos del plan de estudios de la División de Ciencias e Ingenierías DCI para las licenciaturas de Ingeniería en sistemas de energía, Ingeniería en redes e Ingeniería ambiental; en las tres licenciaturas se cursa la materia de física AD-124 en primer semestre, donde en la Unidad 2 se tiene destinada 8 horas para el tema de "movimiento y cinemática del movimiento de traslación" el desglose del contenido se presenta a continuación:

Unidad 2

Movimiento y Cinemática del movimiento de traslación (8 horas)

Objetivo

El alumno podrá describir las leyes del movimiento, los conceptos y relaciones fundamentales del movimiento de traslación y utilizarlas en la solución de problemas relacionados.

- 2.1. Leyes del movimiento y tipos de movimiento. La posición, la velocidad, la aceleración.
- 2.2. Cinemática del movimiento traslacional rectilíneo.
- 2.3. Cinemática del movimiento de traslación circular.
- 2.4. Cinemática del movimiento de proyectiles. (Fuente: Programa de estudio de la materia de física AD-124)

Los alumnos de estas tres licenciaturas cursarán las materias de Matemáticas III AD-129 y Matemáticas IV AD-132.

A continuación, se describe cada una de las materias:

Matemáticas III. Este curso proporciona a los estudiantes conocimientos sobre las funciones de variables reales, sobre los métodos para analizar su comportamiento por medio de diferentes representaciones, identificando puntos y características claves [...]

Matemáticas IV. Este curso proporciona a los estudiantes conocimientos sobre las funciones de varias variables, escalares y vectoriales, sobre los métodos para analizar su comportamiento por medio de diferentes representaciones, identificando puntos y características claves [...]. (Plan de Estudios del Portal SAE: Sistema de Administración Escolar, Universidad de Quintana Roo)

Los estudiantes inscritos en la licenciatura de Ingeniería en sistemas de energía cursarán la materia de Dinámica (Mecánica II) AD-135 donde en uno de los contenidos es *Cinemática de un cuerpo puntual*, cuyo objetivo es analizar los movimientos rectilíneo y curvilíneo de una partícula, derivando las expresiones para el desplazamiento, la velocidad y la aceleración. En tanto que en la licenciatura Ingeniería en redes se cursa la materia de mecánica AD-114, donde también se abordan conceptos similares a la materia de AD-135.

En el diseño de la secuencia didáctica se inicia con los conceptos de posición, trayectoria y desplazamiento, posteriormente con los conceptos de rapidez y velocidad. A continuación se presentan el diseño del grupo de actividades explicando el objetivo perseguido en cada una de ellas.

3.4.1. Criterios considerados para el diseño de las Actividades

3.4.1.1. Partiendo del entorno

Iniciar con una situación conocida para el estudiante como, por ejemplo: un automóvil circulando por una calle, un fenómeno simple, pero que identifican o imaginan muy fácilmente. Involucrar la importancia de señalar un punto de referencia [el marco de referencia inercial es considerado como la Tierra] para llevar a cabo mediciones de posición y tiempo, es decir, prestar atención al movimiento unidimensional, el moverse hacia adelante o hacia atrás y el tiempo involucrado en cada movimiento. Este movimiento se representa usando esquemas y dos ejes horizontales: uno para la posición y el otro para el tiempo.

En las ocho primeras Actividades, debido a que de esa forma siguen "observando" el fenómeno físico, se construyen las primeras unidades significantes. Iniciar con la operación aritmética –conocida por los estudiantes con la ayuda de las fórmulas– para encontrar la rapidez media y velocidad media de todo el recorrido, así mismo, pedirles que

expliquen lo que quiere decir cada uno de los valores encontrados para que busquen – dentro de su estructura cognitiva– respuestas lógicas a esos valores.

3.4.1.2. El uso del Plano Cartesiano

A partir de la Actividad 9, se hace uso de un Plano Cartesiano o ejes coordenados y, en particular, en la Actividad 9.1 el estudiante puede transferir las unidades significantes que identificó en las Actividades anteriores. Se transfieren los datos registrados en el momento que el móvil circulaba. Tales datos son: posición y tiempo; construyen la gráfica con estos datos asociando la posición con el tiempo en forma de coordenada (t, x) y trazando las líneas que resultan al unir todas las coordenadas. Hasta este momento se considera que se puede *ver* la gráfica de una manera puntual; que da la indicación de un valor en un momento dado, lo que es señalado por Duval (2001) como la primera manera de *ver* una gráfica Local por punteo.

3.4.1.3. Interpretación del Gráfico

A partir de la Actividad 9.2, se inicia a darle otros significados a la gráfica de posición en función del tiempo, por ejemplo, se intenta que relacionen la tangente del ángulo de inclinación de la recta con su pendiente, el sentido del movimiento (derecha, izquierda), que puedan observar y calcular, para cada intervalo de tiempo donde la pendiente es la misma, la distancia recorrida sobre el eje vertical. De esa manera, poder sumar todas las distancias para conocer la distancia total recorrida. También, que puedan relacionar el valor de cada pendiente con la rapidez y la inclinación –signo– de cada pendiente con la velocidad. Así mismo, comparar los valores de la rapidez media y velocidad media. La interpretación de estas relaciones entre las unidades significantes se dan en la etapa de Aprehensión Icónica que de acuerdo con Duval (2001) es la interpretación dominante.

3.4.1.4. Relación del Grafico con la expresión algebraica

En las Actividades 10 y 11, los estudiantes se familiarizan con las líneas rectas y curvas y las relacionan con las expresiones algebraicas [ecuación de la recta, ecuación de la parábola].

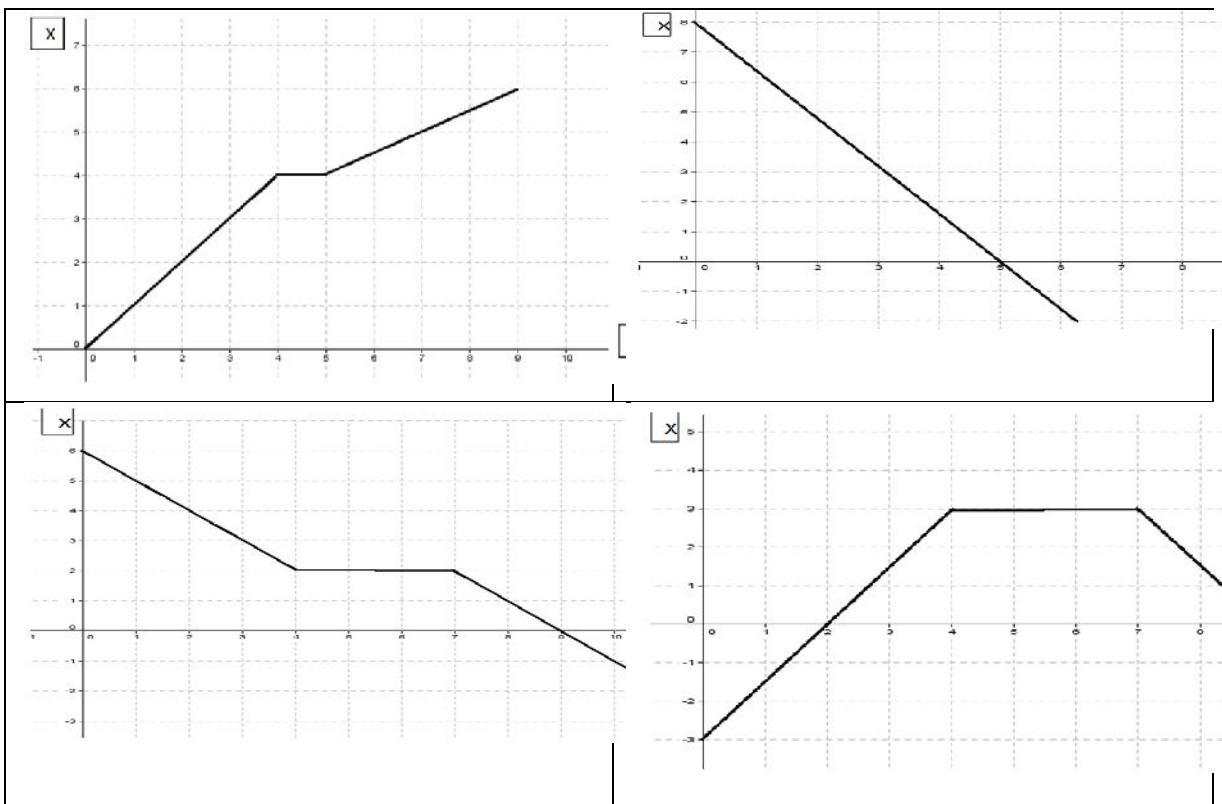
3.5.1. Evaluación Diagnóstica

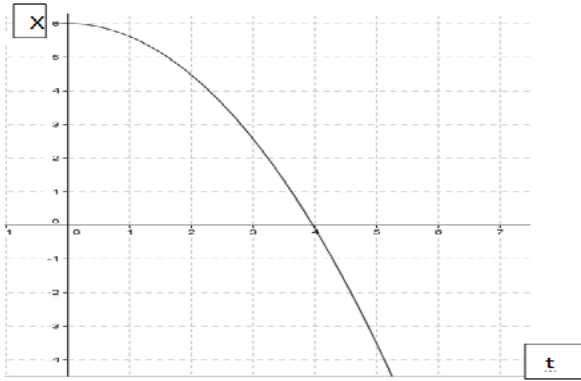
Para identificar los conocimientos que el estudiante poseía al inicio de la implementación de las Actividades, se realizó una evaluación diagnóstica acerca de interpretar gráficos relativos al movimiento rectilíneo uniforme. Esta evaluación consistió en la interpretación

de cinco gráficas que representaban el movimiento rectilíneo uniforme (velocidad constante) y movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (velocidad variable) y se presentan a continuación.

Descripción de la Actividad

Cada una de las gráficas representa la distancia recorrida por una persona, en un cierto tiempo. El objetivo es que describas el comportamiento de la persona, la distancia recorrida, el tiempo en que lo realizó y el tipo de velocidad que tiene. El eje vertical representa la distancia recorrida en metros y el eje horizontal representa el tiempo en minutos.





3.5.2. Primer grupo de Actividades

Objetivo: El estudiante pueda entender el concepto de posición desde una perspectiva real y poder trasladarla a un registro de lápiz y papel, relacionando la secuencia de la posición con el movimiento rectilíneo en función del tiempo, identificando al eje horizontal como la línea donde se mueve el objeto y de manera similar identificar al mismo eje como la línea del tiempo, iniciar con el apoyo de las ecuaciones, el cálculo de la rapidez y velocidad media. Partir de un fenómeno físico, un contexto real podría dar sentido al concepto de posición y trayectoria y relacionarlo con el transcurrir del tiempo, posteriormente, organizar el movimiento para comenzar a matematizarlo gráficamente haciendo uso de cantidades escalares (trayectoria) y vectoriales (desplazamiento).

3.5.2.1. Actividades 1, 2, 3, 4 y 5

La siguiente figura muestra un auto circulando por una calle. Considere el punto de partida el marcado como 0 m , el auto se mueve hacia la derecha 30 metros.

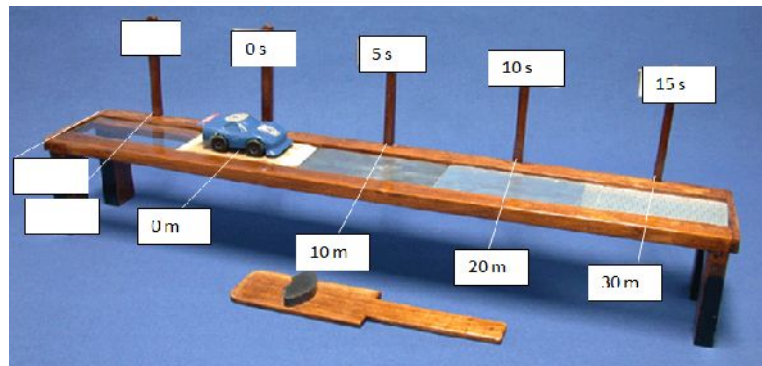


Figura 3. 1. Móvil desplazándose hacia la derecha sobre una calle.

De acuerdo con la Figura 3.1, el tiempo transcurrido y la distancia recorrida se realiza hacia la derecha, como se señala en la siguiente figura.

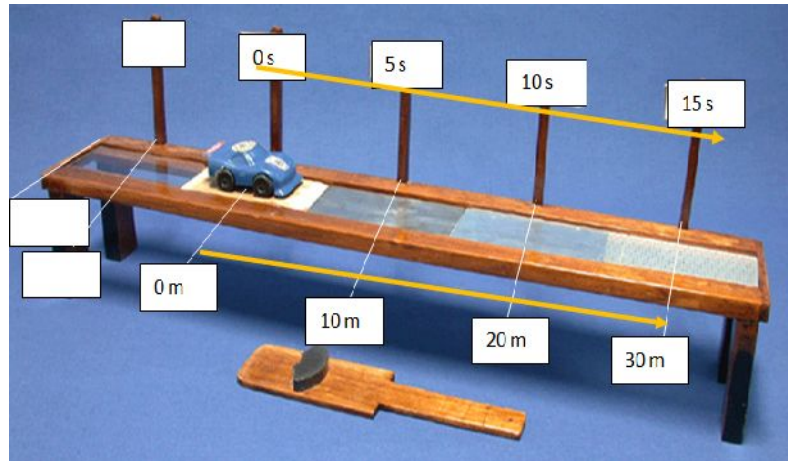


Figura 3. 2. Forma en la que se registra el tiempo y la distancia recorrida.

Actividad 1

Problemática: En la siguiente gráfica señala con un color los puntos (posición) que indica la figura anterior y con una línea continua, de otro color, la distancia total recorrida; de la misma forma, señala con un color los tiempos que se indican en la figura y con una línea continua el tiempo total transcurrido.

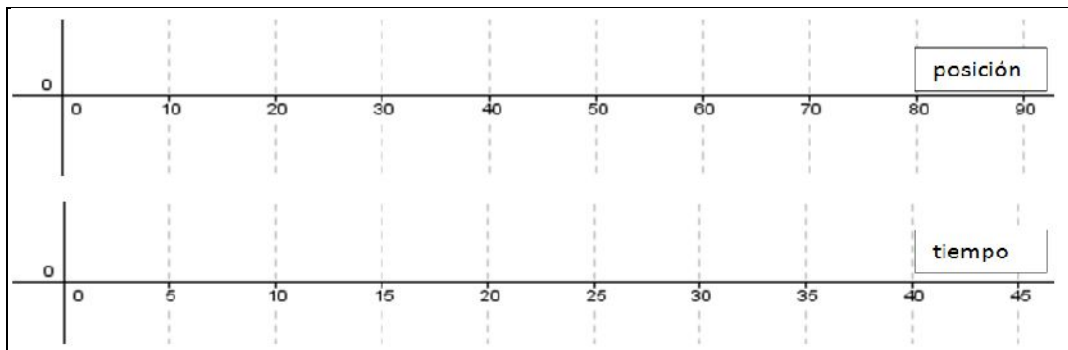


Figura 3. 3. Esquematización del movimiento rectilíneo.

Actividad 2

Problemática: Ahora, considerando que el móvil al llegar a los 30 m decide dar reversa (o dar media vuelta) y regresar hasta 10 m más atrás de donde partió. Basándote en la figura que se presenta a continuación, dibuja las dos líneas horizontales similares a las de la Actividad 1 y dibuja las posiciones (puntos) y con una línea continua su distancia total recorrida así como el tiempo en cada punto y con una línea continua el tiempo total transcurrido.

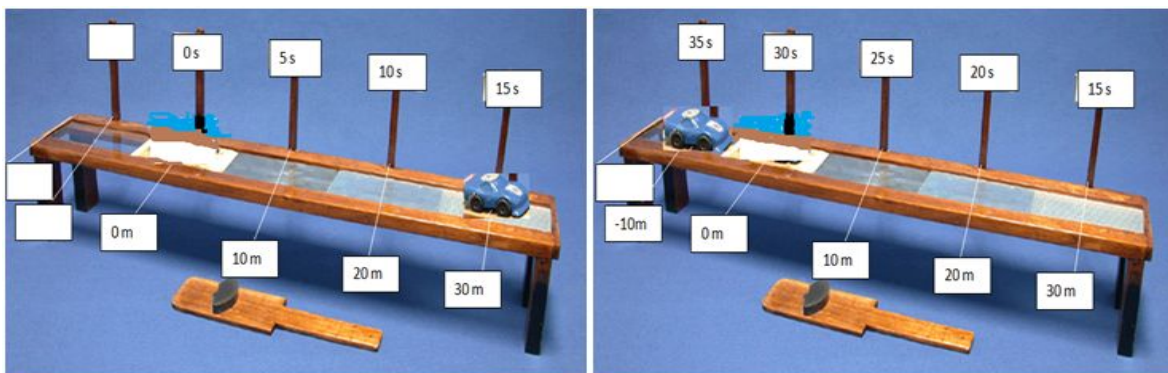


Figura 3. 4. Móvil desplazándose en reversa 15 s después de haber iniciado el movimiento.

Actividad 3

Problemática: Ahora, dibuja otras gráficas similares a las anteriores donde se registre el movimiento total del móvil de ida y vuelta (posiciones, distancia y tiempos).

Actividad 4

Problemática: Por último, si el conductor del móvil decide hacer este movimiento tres veces más de la misma forma, ¿cómo se registraría o dibujaría en una sola gráfica (como las que se han utilizado en las Actividades 1, 2 y 3)? ¿Es práctica esta forma de graficar? Justifica tus respuestas.

Actividad 5

Problemática: Recordando que la rapidez media y velocidad media se calculan por medio de las siguientes igualdades:

$$v_R = \frac{\text{distancia total recorrida}}{\text{tiempo total transcurrido}}$$

$$v_m = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Apóyate en los resultados de la gráfica correspondiente a la Actividad 3; calcula la rapidez media y velocidad media a los 10 s, 15s, y 35 s.

Preguntas de reflexión:

¿Cómo son los resultados entre la rapidez media y velocidad media a los 10 s y 15 s? ¿Qué significa?

¿Cómo son los resultados entre la rapidez media y la velocidad media a los 35 s? ¿Qué significa?

3.5.2.2. Segundo grupo de Actividades 6 y 7

Objetivo: Que el estudiante identifique el concepto de desplazamiento en un movimiento rectilíneo, reafirme el concepto de distancia recorrida y calcule la rapidez media y velocidad media. Además, se introduce la tabla de datos como otro tipo de representación que podría sustituir la imagen real del objeto (fenomenología).

Actividad 6

Problemática: La Figura 3.5 muestra a una persona caminando sobre una calle; su punto de partida es $x_1 = 0$, parte del origen, camina hacia la derecha 30 metros y regresa de nuevo hasta llegar a 10 metros después del punto de partida.

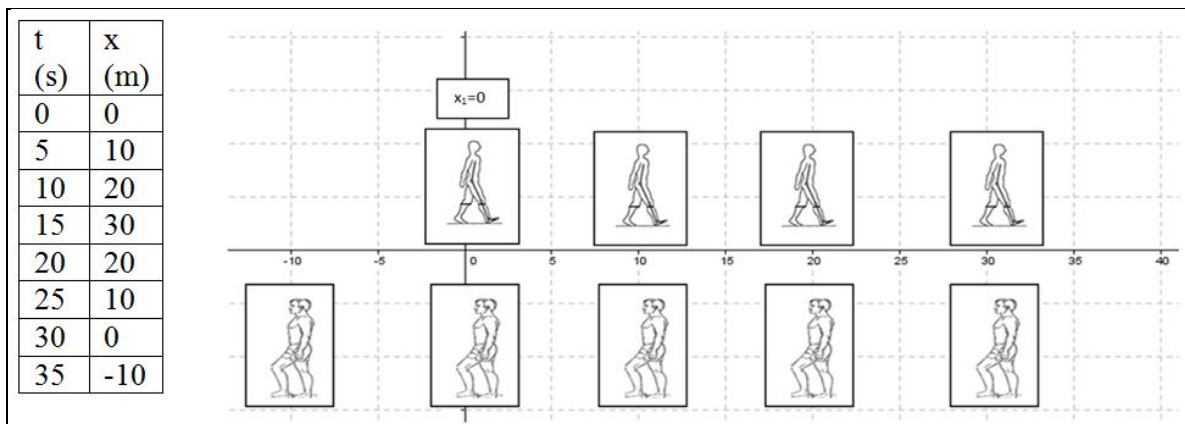


Figura 3. 5. Esquemización del movimiento de la persona.

Preguntas de reflexión:

- 6.1. Considerando a x_2 en la posición a 20 metros de la derecha del origen, ¿cuánta distancia ha recorrido entre el origen y x_2 ? ¿Cuál es la diferencia entre x_2 y x_1 ?
- 6.2. Considerando a x_2 en la posición a 30 metros de la derecha del origen, ¿cuánta distancia ha recorrido entre el origen y x_2 ? ¿Cuál es la diferencia entre x_2 y x_1 ?
- 6.3. Ahora está de regreso, hacia el origen nuevamente, y x_2 está ahora a 20 metros a la derecha del origen ¿cuánta distancia ha recorrido entre el origen y la posición x_2 (de regreso)? ¿Cuál es la diferencia entre x_2 y x_1 ?

6.4. Ahora, se encuentra en el origen, entonces x_2 es la posición del origen, ¿cuánta distancia ha recorrido entre el origen y la posición x_2 (de regreso)? ¿Cuál es la diferencia entre x_2 y x_1 ?

6.5. Por último, se encuentra en la posición de 10 metros atrás de la posición inicial, o sea $x_2 = -10m$, ¿cuánta distancia ha recorrido entre el origen y la posición x_2 (de regreso)? ¿Cuál es la diferencia entre x_2 y x_1 ?

Actividad 7

Problemática: Como se ha observado, la distancia total recorrida entre la posición inicial y la final es diferente de la distancia del desplazamiento, ya que esta última se identifica, además, como la medida de la distancia, es decir, la posición donde se encontraba al inicio y la posición donde se encontraba al final de todo el movimiento.

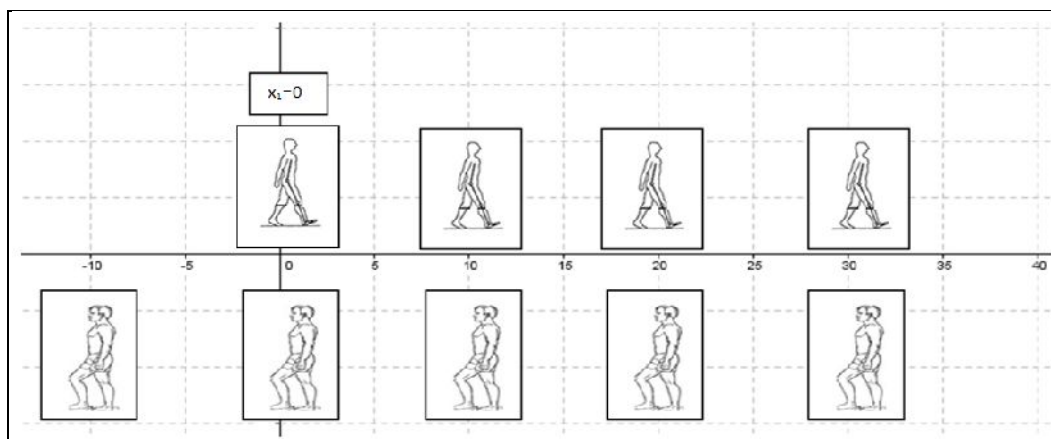


Figura 3.6. Esquematización del movimiento de la persona.

La línea continua representa la distancia total recorrida y la línea discontinua representa el desplazamiento, es decir, la distancia total recorrida es haber cubierto toda la distancia en un movimiento rectilíneo y el desplazamiento es sólo la distancia entre la posición inicial y la posición final, es como el "atajo", "el camino corto" para llegar de una posición a otra.

Dada la tabla en la Actividad 6, calcula la rapidez media y velocidad media a los 5, 20, 30 y 35 segundos.

$$v_R = \frac{\text{distancia total recorrida}}{\text{tiempo total transcurrido}}$$

$$v_m = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Preguntas de reflexión:

- 7.1. ¿Cómo son los resultados entre la rapidez media y velocidad media a los 5 y 20 s? ¿Qué significa?
- 7.2. ¿Cómo son los resultados entre la rapidez media y velocidad media a los 30s? ¿Qué significa?
- 7.3. ¿Cómo son los resultados entre la rapidez media y velocidad media a los 35s? ¿Qué significa?

3.5.2.3. Actividad 8

Objetivo: El estudiante podrá distinguir la diferencia entre distancia total recorrida y desplazamiento.

Actividad 8

Dos personas se deben encontrar en el punto C; ambas salen del mismo lugar, al mismo tiempo, sólo que la primera persona debe caminar un total de 55 metros (40 m de ida y 15 m de regreso) en 55 segundos y la segunda persona sólo caminará 25 m de ida, pero debe hacer el mismo tiempo que la primera persona para llegar iguales al punto C.

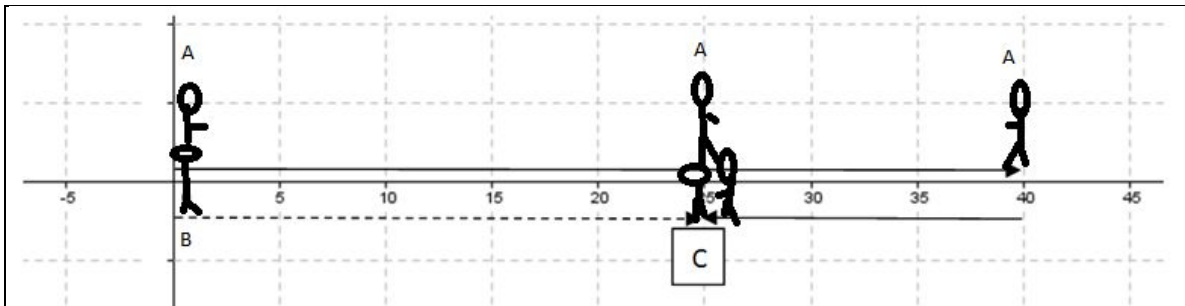


Figura 3.7. Esquemización del movimiento de la persona.

Problemática: Observa que la persona A caminó más distancia que la persona B para llegar al mismo punto, la persona B sólo caminó lo "indispensable" para llegar al punto C, se podría decir que llevó a cabo un desplazamiento.

Preguntas de reflexión:

8.1. ¿Cómo debe ser la velocidad de la persona A (mayor, menor o iguales) respecto a la persona B para que puedan llegar al mismo tiempo al punto C?

8.2. Entonces ¿cómo debe ser la velocidad de la persona B (mayor, menor o iguales) respecto a la persona A para que lleguen al mismo tiempo al punto C?

La respuesta de estas preguntas significa que la persona A representa una rapidez media, en tanto que la persona B representa la velocidad media de todo el movimiento realizado por la persona A.

3.5.2.4. Actividad 9

Objetivo: El uso e importancia de un sistema de referencia inercial en la representación de un movimiento rectilíneo, traduciendo el esquema que se venía trabajando a un plano cartesiano, así como relacionar la pendiente de una recta y el sentido del movimiento del objeto basándose en la proyección ortogonal de la línea hacia el eje vertical.



Figura 3.8. Comentarios de personajes de caricaturas sobre el uso de un punto de referencia.

Los ejes cartesianos ayudan a relacionar variables entre sí, mostrando una gran variedad de conceptos, además de manipular, predecir, conjeturar, los objetos matemáticos y físicos que ellas representan, por ejemplo, en un movimiento rectilíneo la gráfica de posición respecto al tiempo muestra:

- La línea del tiempo en forma progresiva;
- Relaciona la posición con su respectivo tiempo en forma progresiva;
- Se puede observar la posición en el eje vertical;

- Los puntos donde se cortan la posición y el tiempo permiten visualizar la velocidad que existe entre dos puntos;
- La pendiente de la recta que se forma al unir dos puntos indica el tipo de velocidad;
- Se puede observar la distancia total recorrida;
- Se puede observar el desplazamiento, entre varios conceptos más;
- Partiendo de toda esta información, se puede hacer la conversión entre registros, pasando del gráfico a la ecuación algebraica, así como del gráfico al lenguaje léxico o escrito.

En el plano cartesiano, sólo se coloca el eje de la posición en sentido vertical y el eje horizontal representa el tiempo.

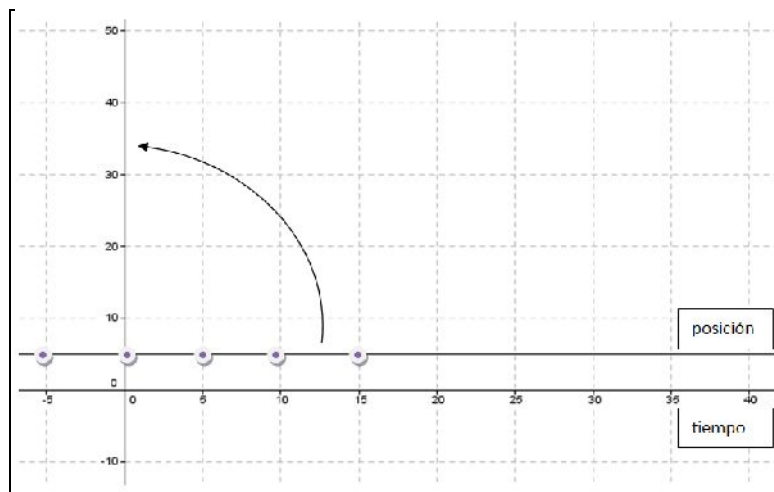


Figura 3.9. Al girar 90° el eje de posición se tiene un plano cartesiano.

Problemáticas de interpretación y de reflexión:

9.1. Según datos de la Actividad 3, presentados en forma de tabla la posición y el tiempo, se trasladaron al plano cartesiano, en seguida, señala los puntos donde se cortan el tiempo con la posición del objeto, y enumera sobre el plano cartesiano la forma en la que el vehículo cambia de posición al transcurrir el tiempo.

Tiempo (s)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Distancia (m)	0	10	20	30	40	50	60	70	80

- 9.2. Considerando el orden de los puntos o la sucesión de puntos ¿qué tipo de línea forman?
 ¿Recta o curva? ¿Cuántas rectas se distinguen? ¿Cómo son sus pendientes?

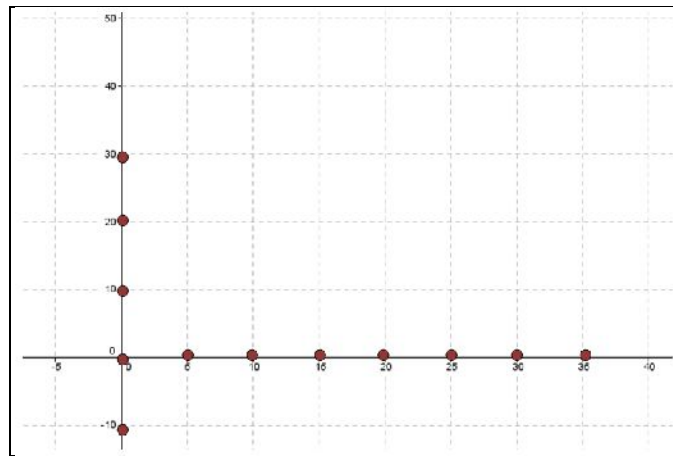


Figura 3. 10. Plano cartesiano utilizado para realizar la Actividad 9.

- 9.3. En el tiempo que la persona caminaba hacia la derecha, ¿cómo es la pendiente de la recta en ese intervalo?
- 9.4. En el tiempo que la persona caminaba hacia la izquierda, ¿cómo es la pendiente de la recta en ese intervalo?
- 9.5. ¿Qué relación existe entre las pendientes y la distancia recorrida?

Debido a la diversidad de procesos cognitivos, de los estudiantes, se muestra otra forma de interpretar el movimiento de objetos, a través de la proyección ortogonal de las líneas del gráfico hacia el eje vertical (posición).

La siguiente figura representa el movimiento rectilíneo de un objeto.

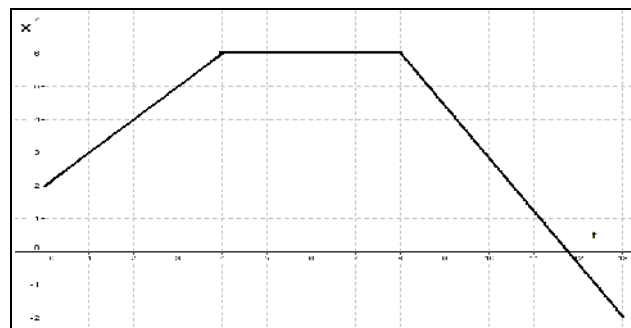


Figura 3. 11. Representación del movimiento del objeto.

Considera que la línea se encuentra en el intervalo de 0 a 4 unidades de tiempo y se proyecta hacia el eje vertical y observando el valor de la pendiente (positiva o negativa) se le da el sentido a esa proyección, por ejemplo:

Proyección del primer intervalo $t=0$ a 4 s

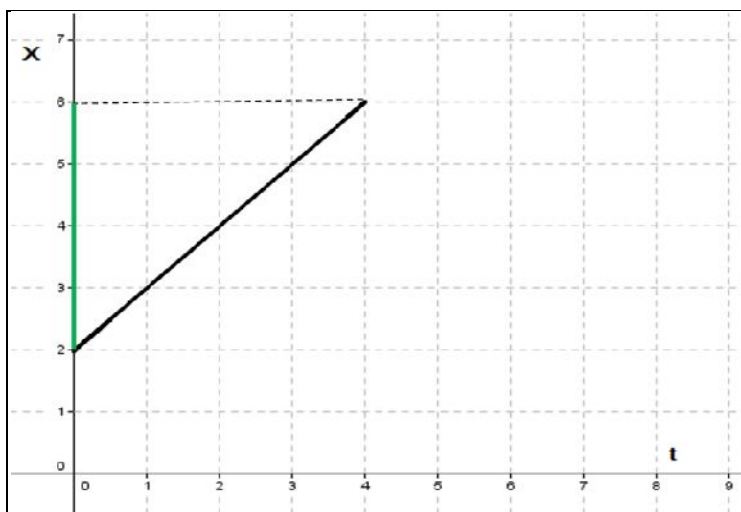


Figura 3. 12. Proyección hacia el eje vertical del movimiento del objeto.

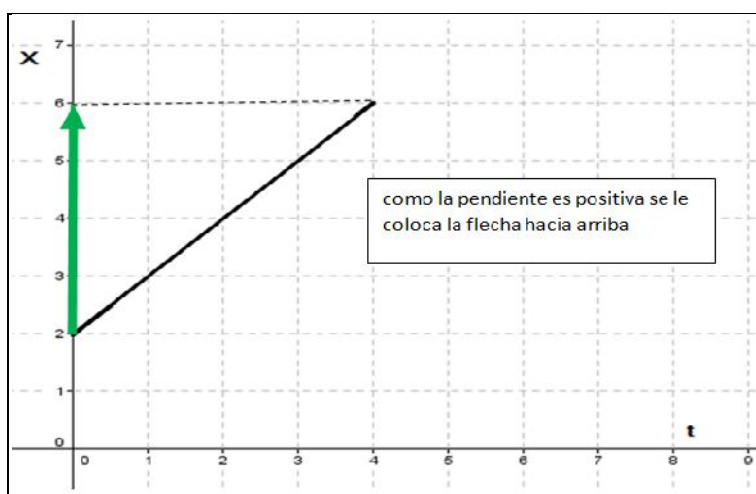


Figura 3. 13. Interpretación de la proyección hacia el eje vertical del movimiento del objeto.

Descripción del movimiento del primer intervalo de tiempo: el objeto parte a 2 m a la derecha del origen y camina en ese sentido 4 m más.

Proyección del segundo intervalo $t = 4$ a 8 s

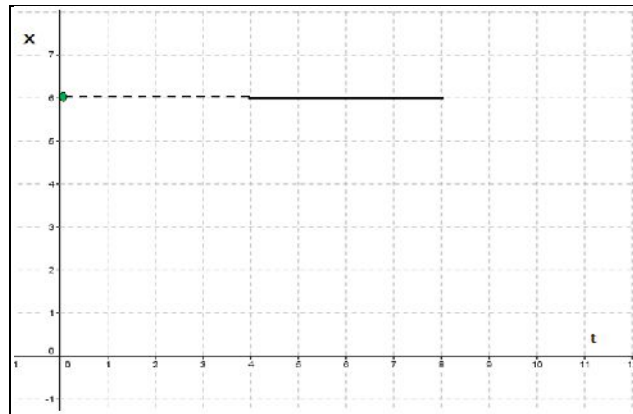


Figura 3. 14. Interpretación de la proyección del movimiento del objeto en el intervalo $t = 4$ a 8 s.

Descripción del movimiento del segundo intervalo de tiempo: el objeto permanece detenido a 6 m del origen durante 4 segundos.

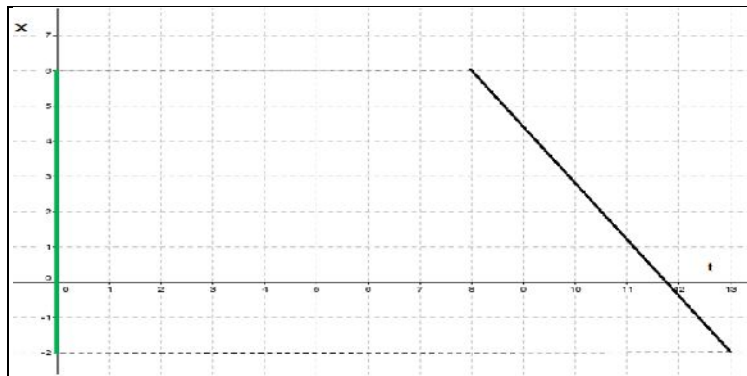


Figura 3. 15. Proyección del tercer intervalo de tiempo $t = 8$ a 13 s.

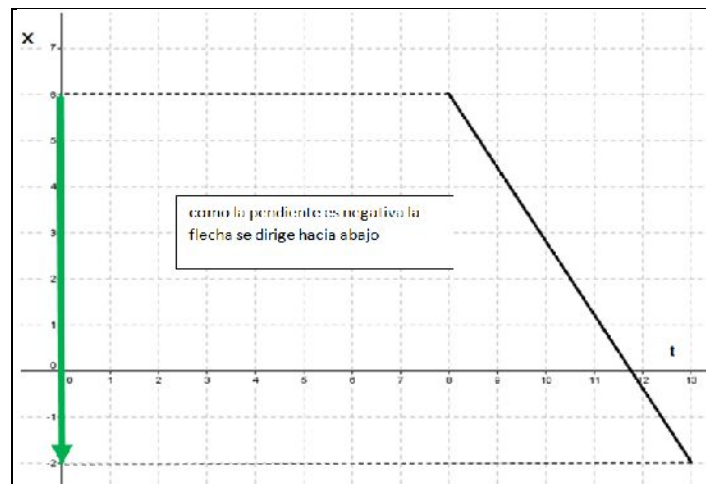


Figura 3. 16. Interpretación de la proyección del movimiento del objeto.

3.5.2.5. Actividad 10

Objetivo: Que el estudiante identifique diferentes pendientes de las rectas en un mismo movimiento, y logre darse cuenta de que éstas representan velocidad variable, entonces, las diferentes pendientes de esas rectas deben relacionarlas con la función cuadrática. Conocerá que una función lineal representa un movimiento con velocidad constante y que una función cuadrática representa un movimiento con velocidad variable (aceleración constante).

Problemática: La caminata de dos personas, en un tiempo determinado, se muestra en las siguientes tablas de valores, ambos tardan 8 minutos en completar su caminata.



Figura 3. 17. Representación de persona caminando.

Persona A		Persona B	
t (min)	x (m)	t (min)	x (m)
0	0	0	0
2	1	2	1
4	2	4	3
6	3	6	6
8	4	8	10

Figura 3. 18. Tabla de valores de caminata de dos personas respecto al tiempo.

Traslada los valores que se muestran en la tabla de la persona A al sistema de referencia inercial A y los valores de la tabla de la persona B al sistema de referencia inercial B y une los puntos en cada caso.

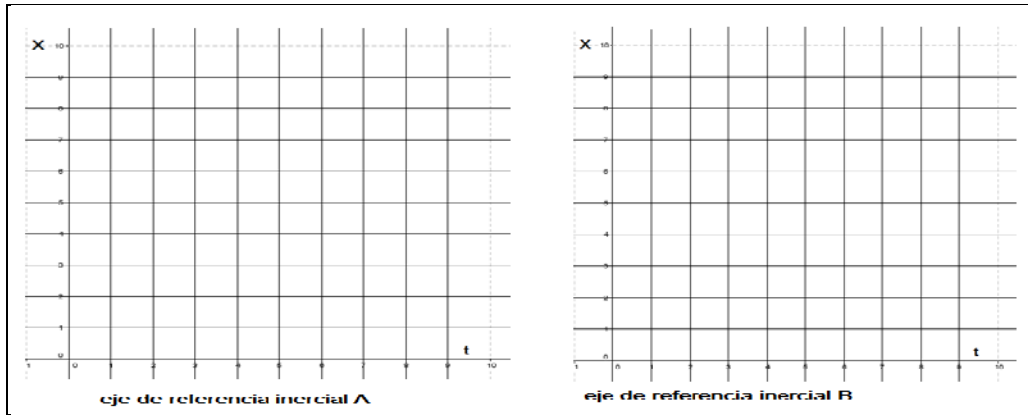


Figura 3. 19. Planos cartesianos utilizados para realizar la Actividad 10.

Preguntas de reflexión:

- 10.1. ¿Cuántas líneas rectas hay con diferente pendiente para la persona A?
- 10.2. ¿Cuántas líneas rectas hay con diferentes pendientes para la persona B?
- 10.3. ¿Existe cambio de velocidad para la persona A? ¿Cuáles fueron sus velocidades en cada uno de los intervalos?
- 10.4. ¿Existe cambio de velocidad para la persona B? ¿Cuáles fueron sus velocidades en cada uno de los intervalos?
- 10.5. ¿Cuál es la aceleración media para la persona A, en cada uno de los intervalos?

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

- 10.6. ¿Cuál es la aceleración media para la persona B, en cada uno de los intervalos?

El movimiento con velocidad constante se identifica con una recta –función lineal–, en tanto que el movimiento con velocidad variable (aceleración constante) se identifica con una función cuadrática.

3.5.2.6. Actividad 11

Objetivo: Determinar la habilidad que los estudiantes tienen al realizar la conversión gráfica a la algebraica, partiendo de las características del movimiento (unidades significantes) y que relacionen el tipo de línea –recta o parábola– con la velocidad y la función correspondiente.

Problemática: Encuentra la función que describe el movimiento de la persona A y de la persona B, basándote en los valores de las tablas y de la gráfica donde se representa el tipo de movimiento.

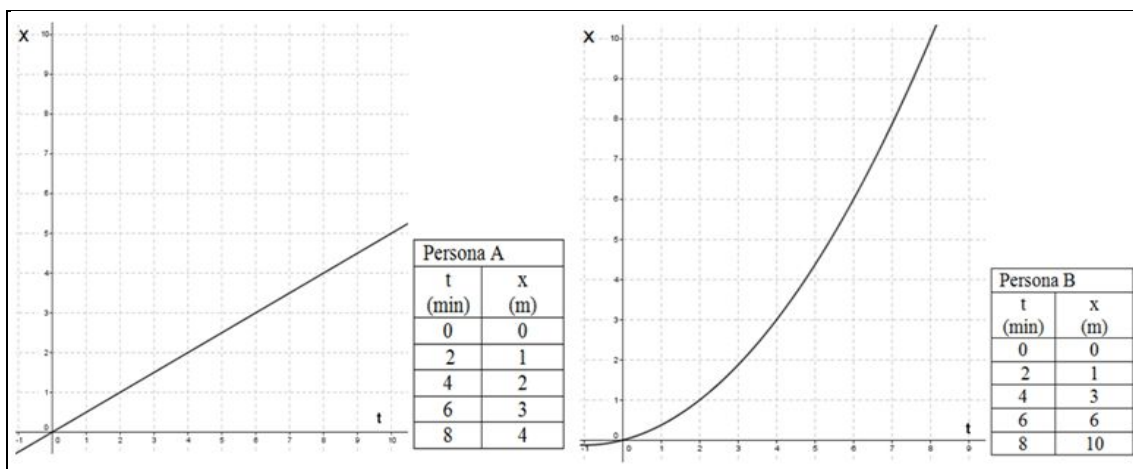


Figura 3. 20. Representación gráfica y tabular de la caminata con respecto al tiempo de dos personas.

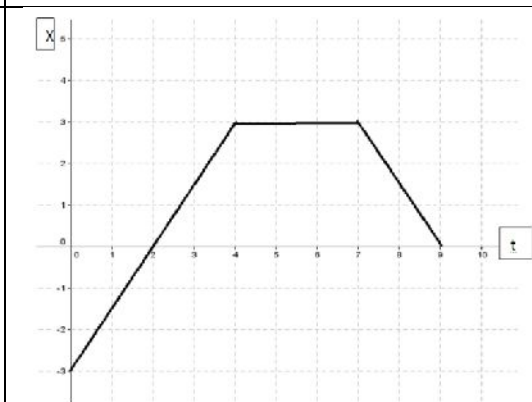
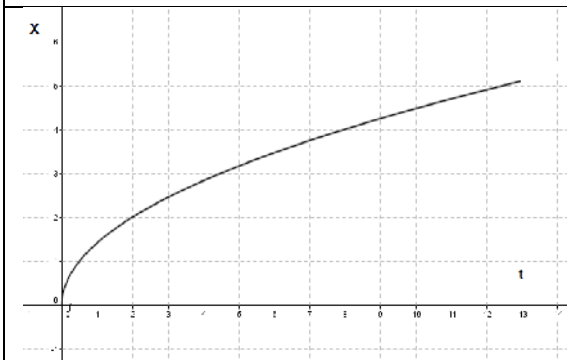
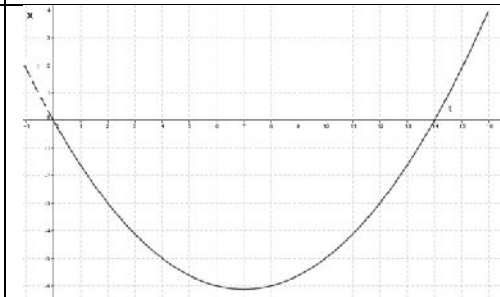
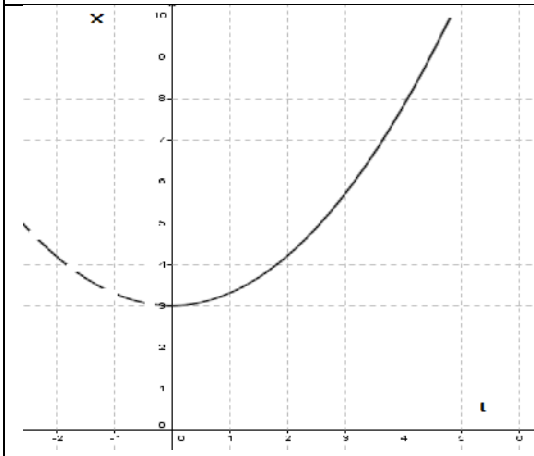
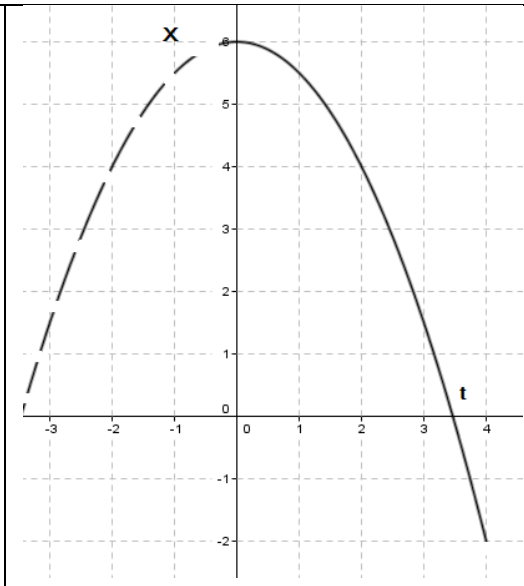
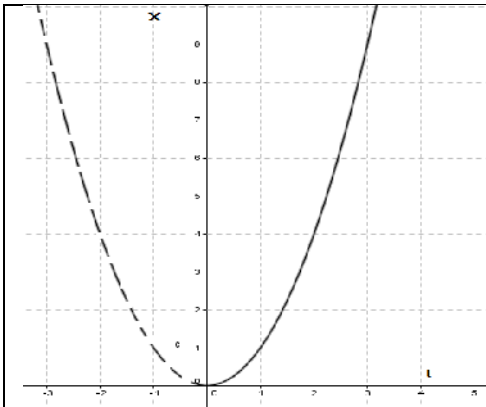
3.5.2.7. Actividad 12

Esta Actividad se implementó de manera oral. Se les mostró diferentes gráficas y se les pedía que describieran o interpretaran verbalmente el tipo de velocidad, la distancia total recorrida, el desplazamiento, la dirección del movimiento, las veces que pasaba por el origen. En seguida, se precisan cómo fueron presentadas las consignas a los estudiantes.

Observa las siguientes gráficas y realiza lo que se pide a continuación:

Problemáticas de interpretación y de reflexión:

- 12.1. Proyecta la línea curva (del primer cuadrante) sobre el eje vertical y señala el sentido de esa proyección en cada uno de los siguientes gráficos.
- 12.2. Describe la forma en que se mueve el objeto en cada uno de los gráficos incluyendo: posición inicial, final, desplazamiento, distancia total recorrida y tipo de velocidad en cada intervalo de tiempo según el tipo de pendiente y el tiempo en que vuelve a pasar por el origen, según sea el caso.



CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE DATOS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

4.1. Introducción

El análisis de datos y la discusión de resultados están basados en la teoría de Duval (2001), en particular, en las tres formas de "ver" los gráficos cartesianos. En la siguiente Tabla 4.1 se resumen las características esenciales consideradas por Duval (2001) en la interpretación de conceptos matemáticos.

Tabla 4. 1. Tres características esenciales en la interpretación de un concepto

Representación Distinguir claramente el contenido de la representación y el objeto representado.	Unidades significantes (código) Características particulares de los objetos matemáticos que ayudan en la comparación de dos registros diferentes.
Tratamiento Transformación estrictamente interna de un registro.	
Conversión Pasar de un registro a otro	
Sustentado en la objetivación (toma de conciencia para sí mismo)	

Tabla 4. 2. Tres maneras de ver los gráficos cartesianos (p. 67). Tabla tomada del libro: "Problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo" (Duval, 2001)

Tres maneras de VER	Lo que es OBSERVADO	Lo que es IDENTIFICADO
<p>I</p> <p>Aprehensión LOCAL POR PUNTEO</p> <p>(sólo se retienen puntos considerados aisladamente)</p>	<p>Asociaciones</p> <p>(puntos, pareja de números)</p>	<p>Una asociación entre dos valores numéricos. La regla de construcción es una regla de codificación: un punto de intersección sobre un plano cuadriculado según dos ejes graduados (la figura al fondo) corresponde a una pareja de números.</p>
<p>II</p> <p>Aprehensión ICÓNICA</p> <p>(la imagen de una tendencia)</p>	<p>Desplazamientos de subida o de bajada en relación con un nivel horizontal</p>	<p>Una analogía con cambios de posición en el espacio físico real (estar más alto, más bajo), relieve</p>
<p>III</p> <p>Aprehensión GLOBAL CUALITATIVA</p> <p>(se trata de poder discriminar las características de dos grafos de la misma forma o no)</p>	<p>Formas D1 (rectas curvas) o D2 (zonas) que tienen características figurales intrínsecas y características extrínsecas: orientación en relación con los dos ejes, y posición (intersección) en relación con los ejes.</p> <p>Un grafo en la figura que se destaca de la figura-fondo de los ejes</p>	<p>Una relación entre dos variables definidas sobre dos conjuntos de valores</p>

El análisis de los datos recabados en esta investigación se efectuó con cuatro de los siete estudiantes participantes en ésta, ya que sólo estos cuatro [estudiantes] asistieron a

100% de la implementación de las Actividades. Así mismo, a estos estudiantes se les entrevistó de forma individual al final de las aplicaciones de las Actividades, con el propósito de contrastar lo que ellos escribieron al momento de resolver las Actividades, y lo que podían argumentar [de manera verbal] en aquellos puntos de la Actividad que les causaron conflicto, ya sea en la interpretación de una gráfica, o bien, desde el punto de vista de los conceptos en discusión.

4.2. Categorías de análisis

Estas categorías están definidas de la siguiente manera:

- (a) *Uso de gráficas en la objetivación de conceptos relacionados con el movimiento: ¿cómo los gráficos les ayuda a comprender conceptos, y a explicarlos de forma coherente?*

En la siguiente tabla se describe la forma en la que los estudiantes interpretan o traducen los gráficos (en un plano cartesiano) desde el punto de vista semiótico [asignación de significados surgidos de los objetos simbólicos por parte de los estudiantes].

Tabla 4. 3. Descripción de la primera categoría de análisis

Objeto matemático (gráfica)	Interpretación Semiótica de los estudiantes
Coordenada (t_0, x_0) siendo $t_0 = 0$	Posición inicial del objeto
Formas de las líneas	Tipo de velocidad
Tipo de pendiente (creciente, decreciente o constante)	Sentido del movimiento (derecha, izquierda, quieto)
Proyección ortogonal de las líneas hacia el eje vertical	Distancia que cubre el objeto
Proyección ortogonal de las líneas hacia el eje horizontal	Intervalo en cubrir una distancia
Cruce de la línea con el eje horizontal, siendo $t_n \neq t_0$	Instante que pasa por el origen
Coordenada (t_n, x_n)	Posición final del objeto
Suma total de la proyección ortogonal hacia el eje vertical	Distancia total recorrida
Proyección ortogonal hacia el eje vertical de la línea que se forma al unir la coordenada (t_0, x_0) y (t_n, x_n)	Desplazamiento
A mayor inclinación de la pendiente de una recta	Mayor velocidad en ese intervalo

(b) Relación entre la representación gráfica y la simbólica: cambio de registros

La conversión de un registro gráfico a uno algebraico: los estudiantes relacionan el tipo de línea [recta o curva] con el grado de la función; aplican destrezas algorítmicas y procedimentales para llegar a la expresión algebraica.

(c) *Procesos iniciales de objetivación: alguna palabra que digan, alguna acción, alguna fórmula, tipos de gestos, etc.*

Se identifican acciones que hacen pensar como inicio de la objetivación:

Asistir con la cabeza.

Emisión de sonidos con la boca, por ejemplo: mmmmm..., haaa.

Confirmar su nuevo conocimiento con la expresión de una afirmación o recalcar la pregunta y respuesta.

Al explicar un movimiento, mover las manos de un lado hacia otro, donde suponen se realiza el movimiento.

Por ejemplo, en la resolución de una de las Actividades, mencionaban que la expresión de "el camino largo" y "el camino corto" (que representaba la distancia total recorrida y el desplazamiento respectivamente) les fue de ayuda para identificar estos conceptos.

4.3. Análisis de datos de acuerdo con la primera categoría: Uso de gráficas en la objetivación de conceptos relacionados con el movimiento

4.3.1. Uso de gráficas en la Objetivación de conceptos relacionados con el movimiento

De acuerdo con las tres maneras de "ver" los gráficos cartesianos, el estudiante inicia con la manera I (LOCAL POR PUNTEO), donde observa puntos o parejas de puntos; un punto de intersección sobre un plano cuadrículado según dos ejes graduados, y sin darle significado icónico a esos puntos.

A continuación, las imágenes que se muestran evidencian los conocimientos previos que los estudiantes tenían al inicio de las aplicaciones [implementaciones] de las Actividades. Se le indicó al estudiante que describiera, *textualmente*, las gráficas mostradas, las cuales representan el movimiento de una persona, respecto al tiempo. El eje vertical indica la posición [distancias recorrida por la persona, a partir de un cierto punto de referencia] en metros y el eje horizontal indica el tiempo [transcurrido durante el desplazamiento de la persona] en minutos.

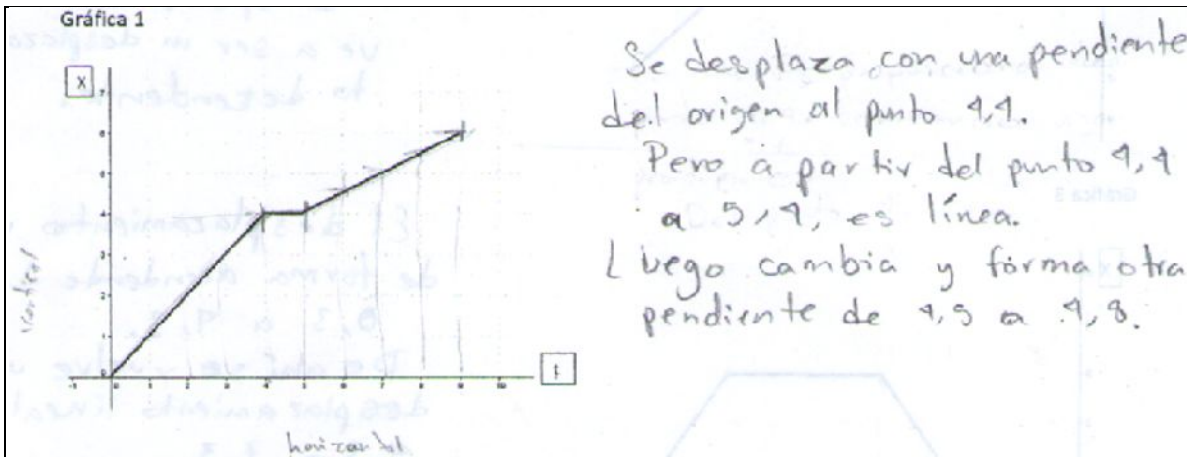


Figura 4. 1. Interpretación del movimiento del objeto (persona) a partir de la representación gráfica de su movimiento.

En la Figura 4.1 se distingue el hecho de que el estudiante MCT menciona puntos y líneas (de esa gráfica), pero sin relacionarlas con el movimiento rectilíneo representado en la gráfica, y llevado a cabo por la persona durante su desplazamiento. Es notorio que el estudiante confunde la representación del movimiento del objeto [persona] con su gráfica del movimiento mismo de ese objeto [persona]. Este tipo de confusión, por parte del estudiante, indica que él [estudiante MCT] se encuentra en la etapa Local por punteo, pues sólo observa puntos o parejas de puntos en el plano cartesiano sin relacionarlos con el problema de movimiento que la gráfica representa.

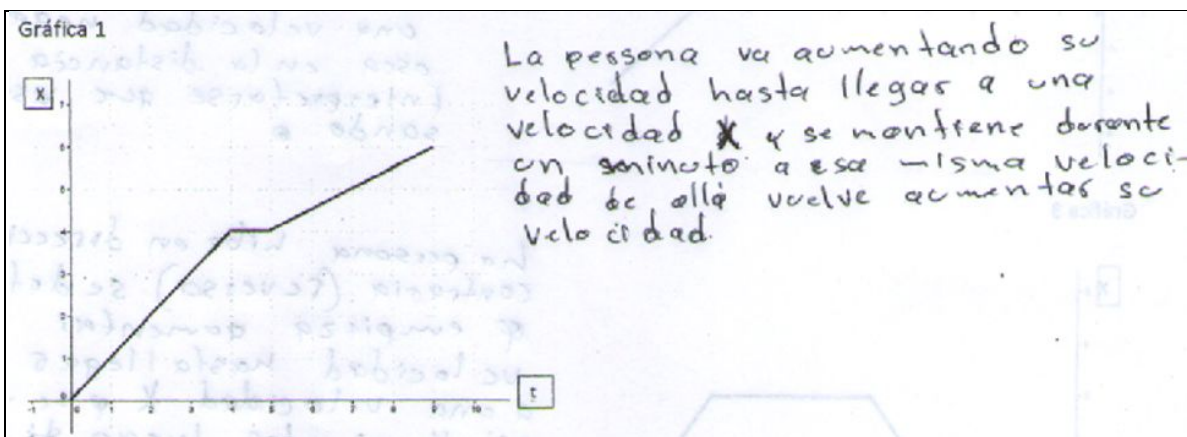


Figura 4. 2. Interpretación del movimiento del objeto (persona) mediante la representación gráfica de su movimiento.

Este estudiante relaciona las líneas rectas inclinadas [de la gráfica] con el aumento de la velocidad, y la línea horizontal como velocidad constante. No mira que el eje vertical

representa las posiciones [de la persona en un tiempo determinado] aun cuando se la hayan dado las instrucciones al inicio de la realización de esta tarea; tampoco menciona puntos o parejas de números pertenecientes a la primera manera de ver un gráfico. Es notorio que su trabajo se limita a describir la gráfica como si se tratara de la velocidad en función del tiempo, y no de la posición de la persona en función del tiempo.

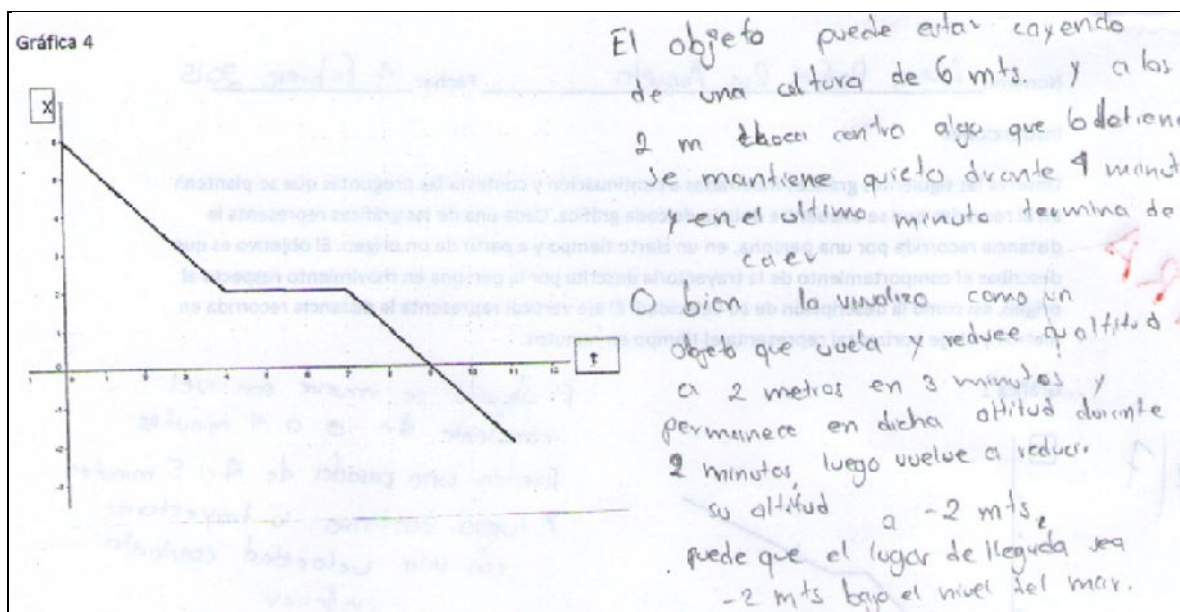


Figura 4. 3. Interpretación de la posición del objeto (persona) mediante la representación gráfica de su movimiento.

Esta interpretación involucra posiciones, tiempos y la noción de movimiento de un objeto –al mencionar que *va cayendo, se mantuvo*–, lo que indica que este estudiante se encuentra en la etapa I: Local por punteo. Es notorio que en esta etapa de su trabajo, el estudiante aún no hace mención del tipo de velocidad ni del valor de la misma, pues si lo hiciera estaría en la etapa II: Icónica. El razonamiento del estudiante es consistente con su forma de mirar la gráfica, y no lo que ella representa, pues se refiere al objeto como aquel que describe un movimiento vertical, a pesar de que en las instrucciones se le indicó que se trataba de una persona que caminaba horizontalmente. La descripción que hace el estudiante de la gráfica involucra puntos, lo que indica que se encuentra en la etapa I: Local por punteo.

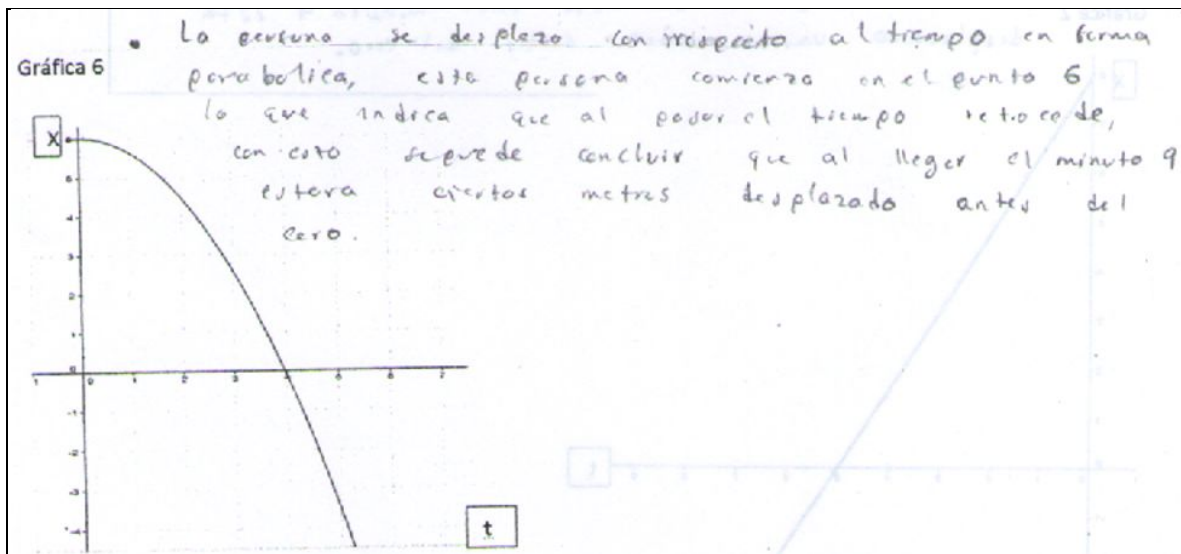


Figura 4. 4. Interpretación de la posición del objeto (persona) mediante la representación gráfica de su movimiento.

La descripción de la gráfica de este estudiante es similar al precedente; también se encuentra en la etapa I: Local por punteo, ya que en la interpretación [de la gráfica] se refiere a posición y tiempo (puntos), posiblemente con alguna noción de movimiento al indicar que *la persona se desplaza, retrocede, llega*, pero cree que la forma de la línea curva es la manera en que la persona camina. De la Gráfica 4.4 se destaca la descripción [de la gráfica] del estudiante: *la persona se desplaza.... en forma parabólica...*

Los cuatro estudiantes reportados en este trabajo de investigación se encontraban – al inicio de la implementación de las Actividades– en la etapa I: Local por punteo, pues indicaban un valor [de la gráfica] en un momento [tiempo] determinado, un punto de intersección sobre un plano, según dos ejes graduados; algunos de ellos con nociones de movimiento (etapa II: Icónica), de acuerdo con Duval (2001).

Posterior a la evaluación diagnóstica, se llevó a cabo la implementación de 12 Actividades, descritas en el Capítulo 3 de esta tesis [correspondiente a Metodología]. El total de las Actividades fueron once escritas y una verbal. En esas Actividades se les presentaba una serie de gráficas, y los estudiantes las interpretaban de forma verbal. La implementación de esta Actividad se grabó en sonido, únicamente.

En el primer grupo de Actividades [1, 2, 3 y 4] se pretende apoyar a los estudiantes en la comprensión de los conceptos de posición, tiempo y distancia recorrida. En el primer

grupo de Actividades [Actividad 5] se refiere al cálculo de la rapidez media y la velocidad media. La intención del segundo grupo de Actividades [Actividad 6] es que los estudiantes logren comprender la diferencia entre distancia total recorrida y desplazamiento. El propósito del segundo grupo de Actividades [Actividad 7] es, además de realizar el cálculo de la rapidez media y velocidad media, conocer la noción de estos conceptos por parte de los estudiantes. La Actividad 8 pretende ayudar a los estudiantes a comprender el concepto de rapidez media y velocidad media. La Actividad 9 trata de apoyar a los estudiantes en la comprensión de la relación entre una pendiente creciente, decreciente y el sentido del movimiento. La finalidad de la Actividad 10 es que el estudiante identifique que diferentes pendientes de las rectas en un mismo movimiento representan velocidad variable, entonces, las diferentes pendientes de las rectas deben relacionarlas con la función cuadrática.

Entonces, si el movimiento de un objeto está descrito por una parábola, ese objeto durante su movimiento describe una aceleración; mientras que una línea recta, si ésta describe el movimiento de un objeto en un tiempo determinado, entonces se trata de una misma velocidad (constante) y, por lo tanto, no existe aceleración. La Actividad 11 pretende conocer la habilidad que los estudiantes tienen al realizar la conversión gráfica a la algebraica, partiendo de las características del movimiento (unidades significantes). Por último, la Actividad 12 se llevó a cabo en forma verbal y los estudiantes expresaban, en palabras, la interpretación de las gráficas que se les presentaban, tratando de identificar las características (unidades significantes) particulares de cada movimiento, por ejemplo, posición inicial, posición final, tipo de velocidad, sentido en el que se mueve de acuerdo con cada intervalo. A continuación, se muestra la Tabla 4.4 que indica la forma en que se aplicaron las Actividades didácticas escritas.

Tabla 4. 4. Aplicación de las Actividades didácticas escritas

Actividades implementadas	Actividades escritas
Grupo 1	1, 2, 3, 4 y 5
Grupo 2	6 y 7
Actividad	8
Actividad	9
Actividad	10
Actividad	11

A continuación, se presentan los resultados que muestran los estudiantes cuando identifican, a partir de un movimiento físico, las posiciones, y los tiempos dentro de un esquema correspondiente a la etapa I: Local por punteo. En las Actividades 1, 2, 3 y 4 se solicita a los estudiantes que esquematicen –con la ayuda de dos ejes horizontales, los cuales representan posición y tiempo– el movimiento físico de un automóvil, por medio de puntos sobre los ejes.

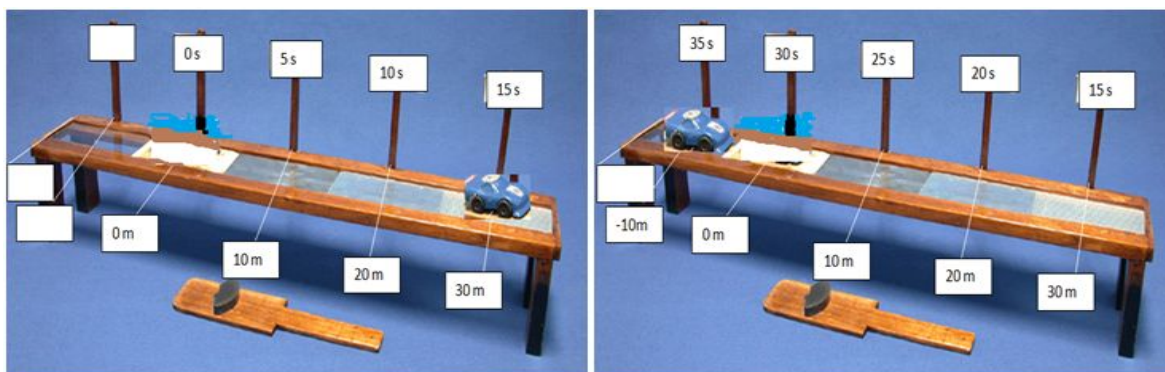


Figura 4. 5. Móvil desplazándose hacia la derecha en los primeros 15 segundos y hacia la izquierda los últimos 20 segundos.

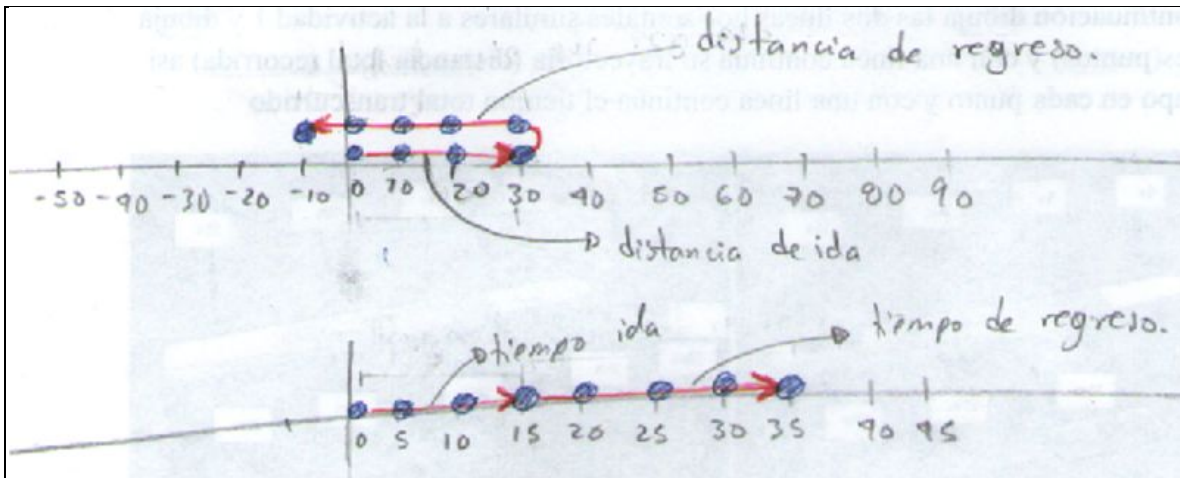


Figura 4. 6. Resultado de la Actividad 3, correspondiente al estudiante MCT.

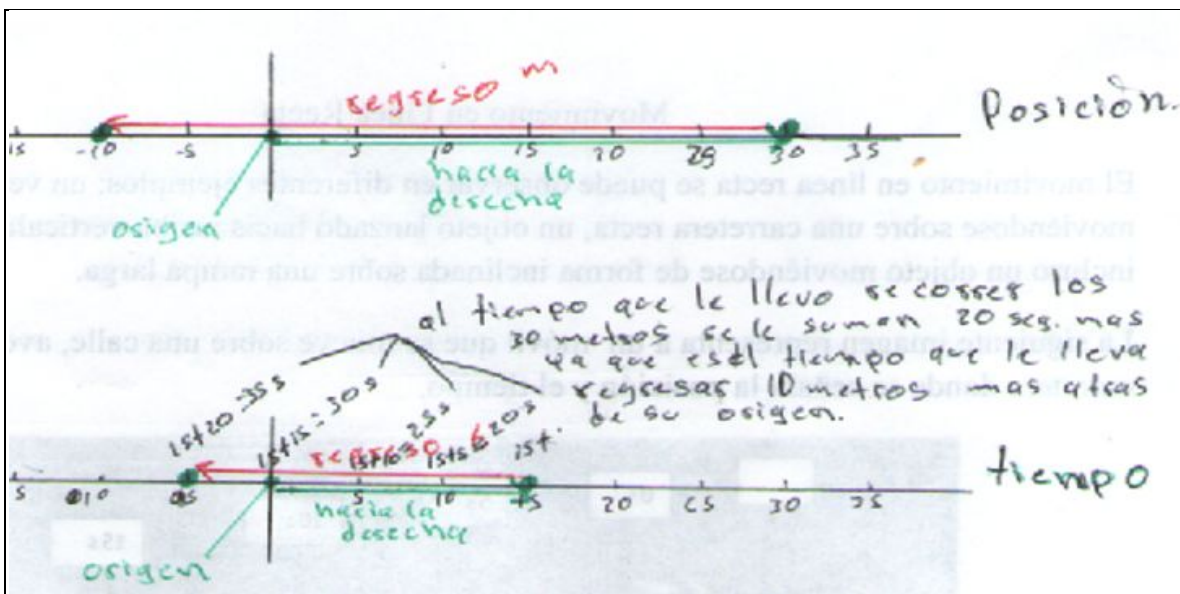


Figura 4. 7. Resultado de la Actividad 3, correspondiente al estudiante ACS.

Tres de cuatro estudiantes presentan resultados similares a los de la Figura 4.5. El resultado del cuarto estudiante se presenta en la Figura 4.6. En esa gráfica, este estudiante señala la medición del tiempo en forma regresiva, de la misma forma que sucede con el movimiento físico. Señala en color verde el tiempo que le tomó caminar hacia la derecha y de color rojo el tiempo que le tomó caminar hacia la izquierda, indicando que el tiempo total fue de 35 segundos. Se observa que el estudiante sabe señalar posiciones del cuerpo *respecto* al tiempo y relacionarlo con el sentido del movimiento. Los conocimientos utilizados por los estudiantes MCT y ACS son similares en la descripción del desplazamiento de los objetos, cuando estos son indicados en línea recta. En los resultados

de esta Actividad, el estudiante muestra que se encuentra en la Categoría I: Local por punteo. El esquema del movimiento físico que se utiliza en esta Actividad es cercano de la realidad, y al percibir datos cercanos de él, le permite comprenderlos de manera fácil.

En las Actividades 1, 2, 3 y 4 se exploraron los conceptos de posición, distancia recorrida y tiempo. De los resultados obtenidos se puede observar que al esquematizar con trazos sobre el eje horizontal, los estudiantes señalan, correctamente, toda la distancia recorrida partiendo de la posición inicial y terminando en la posición final. De acuerdo con Tippens (2011, p. 46), señalar la distancia total recorrida como " la suma aritmética de S_1 y S_2 " considerando que S_1 y S_2 se refieren a dos distancias en diferentes intervalos de tiempo; existió –en uno de los estudiantes– dificultad para graficar el tiempo, pues en este tipo de ejes paralelos no existió practicidad en coincidir la posición con el tiempo (positivo) en todo el movimiento, ya que el movimiento se la derecha (+) e izquierda (-) en tanto que el tiempo lo graficó de la misma manera.

La Actividad 5, cuyo objetivo es recoger la información acerca del conocimiento previo que tenían los estudiantes en cuanto a los conceptos de rapidez media y velocidad media, en esta Actividad se obtuvieron resultados que muestran sólo el uso de la fórmula, los procedimientos sin prestar atención a la diferencia entre estos dos conceptos. Los conceptos involucrados en las fórmulas para calcular rapidez media y velocidad media son; distancia total recorrida para el primero y desplazamiento para el segundo; sin embargo, en la práctica y en la formación docente, en ocasiones es común usar indistintamente distancia recorrida como trayectoria, en algunos textos se encuentra, por ejemplo: "la velocidad constante implica *tanto* rapidez constante *como* dirección constante. Esta última es una recta: la trayectoria del objeto no describe una curva.

Por consiguiente, velocidad constante significa movimiento en una recta a rapidez constante.... Si la rapidez o la dirección cambian (o si ambas lo hacen), entonces cambia la velocidad" (Hewitt, 2007, p. 44). "Si no hubiera gravedad podrías lanzar una roca hacia el cielo, y seguiría una trayectoria recta. Sin embargo, debido a la gravedad, la trayectoria describe una curva.... si no hubiera gravedad, la bala seguiría la trayectoria rectilínea que indica la línea punteada." (Hewitt, 2007, pp. 184 y 187). Es pertinente aclarar que institucionalmente trayectoria y distancia recorrida no significan lo mismo.

La Actividad 6 explora los conceptos de distancia total recorrida y desplazamiento, de los resultados obtenidos se observa que todos los estudiantes lograron realizar, adecuadamente, los cálculos; mostraron la diferencia entre estos dos conceptos, ya que para el cálculo del desplazamiento hicieron uso de la diferencia entre la posición final y la posición inicial; en cambio, para expresar el resultado de distancia recorrida realizaban la suma aritmética de todo el movimiento, según el tiempo indicado. "El *vector de desplazamiento* $\overrightarrow{\Delta r}$, se define como el cambio de posición que se realiza en este intervalo." (Resnick, 2002, p. 18).

A partir de la Actividad 5 a la Actividad 11 se trata de Actividades que tienen la intención de darle *significado a los signos* (Categoría II: Icónica) como los puntos y líneas que se ven en una gráfica, por ejemplo, un punto sobre el eje vertical cuando $t = 0$ segundos indica la posición inicial del movimiento, o cuando un punto esté sobre el eje horizontal indica el momento en el que está de nuevo en el origen; una línea recta indica el tipo y valor de la velocidad, también indica el sentido del movimiento. A continuación, se presenta la Actividad 9 donde se le pide al estudiante que grafique los datos en forma de tabla y una los puntos para ver cuántas y qué tipos de líneas se forman ¿rectas o curvas? ¿Tipo de pendientes? Relacionar la línea recta (*signo*) con el sentido del movimiento, valor de la pendiente y trayectoria (*significado*).

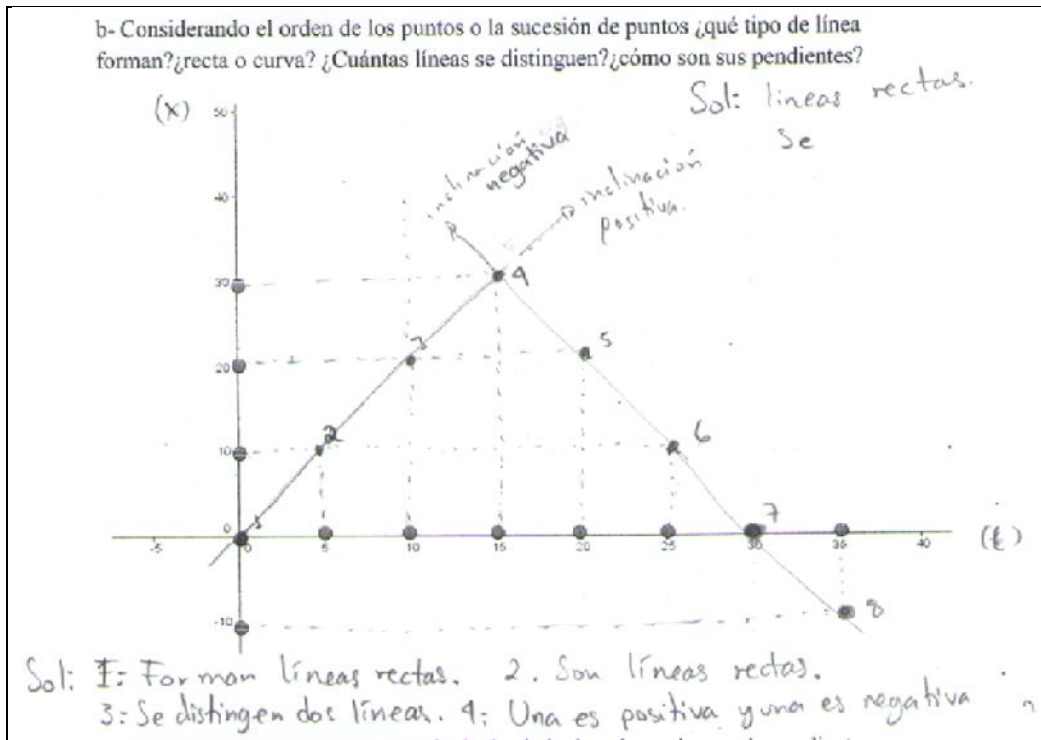


Figura 4. 8. Resultado de la Actividad 9, correspondiente al estudiante MCT.

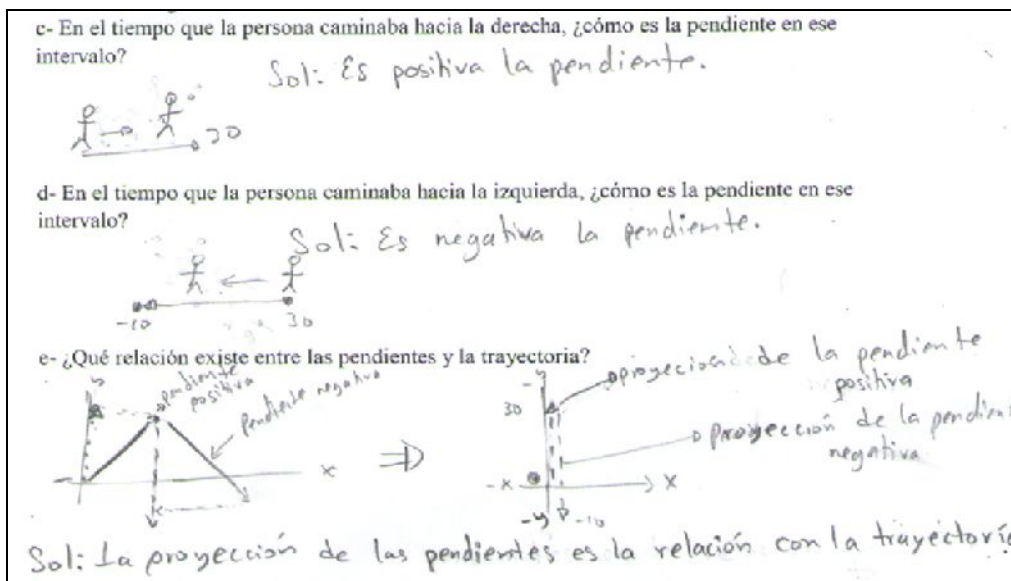


Figura 4. 9. Resultado de la Actividad 9, correspondiente al estudiante MCT.

En las figuras 4.8 y 4.9 se observa que el estudiante MCT plasma sus ideas, en torno a las rectas que pasan por ciertos puntos y su relación con el movimiento, en esquemas y dibujos. Este estudiante complementa su idea sobre la relación entre las rectas con su pendiente, y ésta a su vez con el movimiento. Por ejemplo, en las respuestas de los

incisos (c) y (d), precedentes bosqueja dibujos, colocando puntos que indican posición, flechas que indican el sentido del movimiento y una persona realizando el movimiento; en el inciso (e) bosqueja dos esquemas separados por una flecha que apunta hacia la derecha del lector, en el esquema de la izquierda. Además de las líneas que se dibujaron en el inciso (b), dibujó unas líneas punteadas con una flecha hacia arriba, señalando el sentido del movimiento en el primer intervalo de tiempo; relacionándolo con la pendiente y en el segundo intervalo la línea punteada apuntando hacia abajo. A estas flechas se les denominó *proyección sobre el eje vertical*; el esquema de la derecha muestra el movimiento físico realizado por la persona.

El significado que el estudiante le da a la línea en el primer intervalo es que el objeto se mueve hacia la derecha y el significado de la línea del segundo intervalo es que el objeto se mueve hacia la izquierda. Estos significados, por parte del estudiante, surgen a partir de la guía que le proporcionan dos hechos para él significativos: el primero, por la proyección ortogonal hacia el eje vertical que representa posiciones y el segundo por el valor de la pendiente (crece o decrece) $m > 0$ o $m < 0$. Partiendo de las proyecciones ortogonales hacia los ejes coordenados, el estudiante puede sumar todas las proyecciones y conocer la trayectoria del objeto. Se puede observar en el proceso mediante el cual obtiene sus resultados que el estudiante comienza a construir sus propios significados en la codificación de las figuras (líneas y puntos) por lo que ya se encuentra en la etapa II: Icónica.

b- Considerando el orden de los puntos o la sucesión de puntos ¿qué tipo de línea forman? ¿recta o curva? ¿Cuántas líneas se distinguen? ¿cómo son sus pendientes?

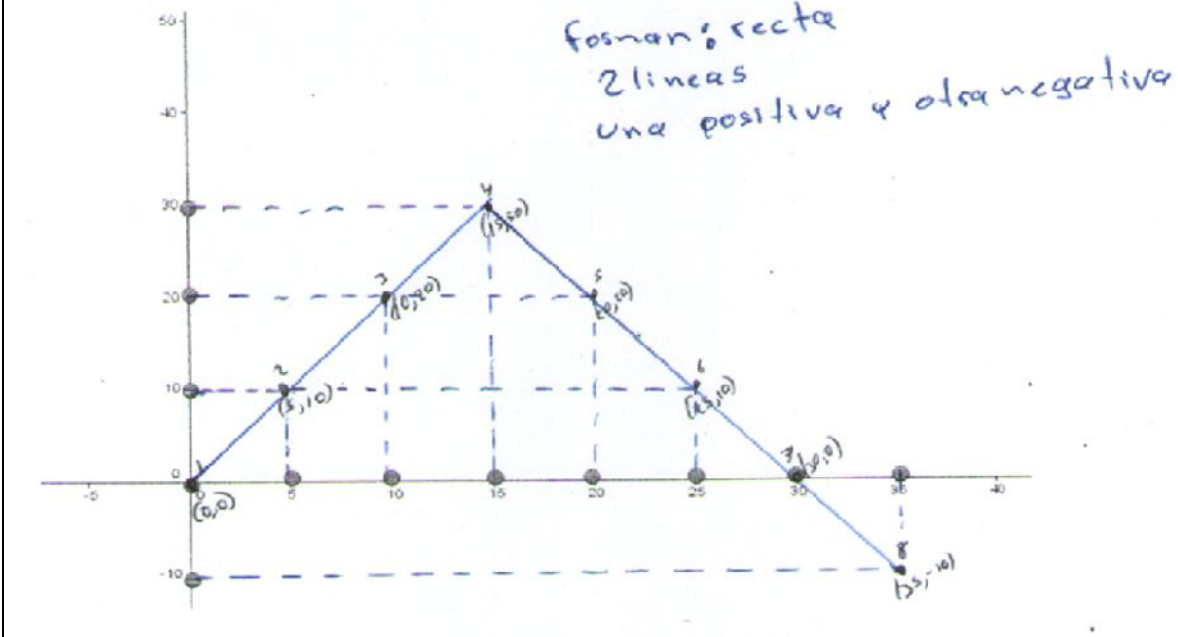


Figura 4. 10. Resultado de la Actividad 9, correspondiente al estudiante ACS.

c- En el tiempo que la persona caminaba hacia la derecha, ¿cómo es la pendiente en ese intervalo?

positiva
hacia
arriba

se fue alejando

d- En el tiempo que la persona caminaba hacia la izquierda, ¿cómo es la pendiente en ese intervalo?

negativa
hacia
abajo

e- ¿Qué relación existe entre las pendientes y la trayectoria?

Son las proyecciones de la trayectoria que secciona tanto de ida como de vuelta.

Figura 4. 11. Resultado de la Actividad 9, correspondiente al estudiante ACS.

En los resultados del estudiante ACS, se nota que de nuevo él usa la palabra *proyección* de ida y vuelta. Esta proyección se refiere a la realizada de la línea recta hacia el eje vertical, dándole significado en cuanto al sentido del movimiento. La Actividad 12 se realizó de forma verbal y fue grabada en sonido. En esta Actividad, el estudiante se enfoca

en las proyecciones ortogonales de las líneas hacia el eje vertical y el sentido del movimiento, la trayectoria y el desplazamiento.

Los resultados obtenidos de la Actividad 9 son favorables. En esta Actividad, se logra que el estudiante le dé significado a la "figura" que ve. El trabajo del estudiante, relacionando las formas de las líneas con el sentido del movimiento –hacia donde se dirige– le permite interpretar el movimiento unidimensional, y afirma que sólo puede dirigirse hacia adelante (derecha) o atrás (izquierda), teniendo un punto de referencia. Los resultados muestran que todos los estudiantes lograron entender esta relación, lo que manifiesta un logro en la interpretación del gráfico.

Así, el marco de referencia tuvo un papel importante en la relación entre estas dos unidades significantes: "es útil graficar la posición x como función del tiempo. Se acostumbra considerar el tiempo t como la variable independiente y medirla a lo largo del eje horizontal (abscisa); la posición x , la variable dependiente, se mide a lo largo del eje vertical (ordenada) (Giancoli, 1997, p. 37). "Si la tangente a la curva $x-t$ sube hacia la derecha,..... su pendiente es positiva, y el movimiento es en la dirección $+x$, Si la tangente baja hacia la derecha, la pendiente y la velocidad son negativas y el movimiento es en la dirección $-x$. Si la tangente es horizontal, la pendiente y la velocidad son 0" (Sears, 1999, p. 36). Este paso es conocido por Duval (2001) como el dominante y que es necesario para una aprehensión global cualitativa.

En la Actividad 11, se le pide al estudiante que describa verbalmente la manera en la que el objeto se mueve, por ejemplo, al mostrarle la siguiente gráfica el estudiante JGE dice:

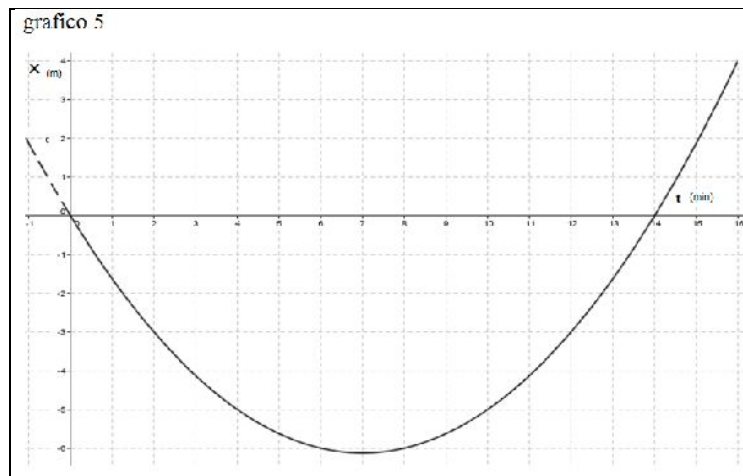


Figura 4. 12. Gráfico mostrado en la Actividad 11.

JGE: Parte desde el origen, retrocede y de ahí vuelve a regresar hacia el origen.

Maestra: ¿En qué minuto vuelve a regresar hacia el origen?

JGE: En el siete.

Maestra: ¡Exacto! En el minuto siete.

Maestra: ACS ¿podrías describir toda la trayectoria de la persona?

ACS: Se movió del origen hacia 4 [Los estudiantes tienen confusión entre la palabra trayectoria y desplazamiento]

Maestra: Al final, así es.

JGS: Es el camino largo.

Maestra: ¿Me podrían decir cuál fue la trayectoria de esa persona?

ACS: Del origen bajó por decir hasta 6 y de ahí volvió a regresar, pero pasó ya hasta, recorrió 4 metros más de donde inicia.

Maestra: Entonces ¿cuál sería su desplazamiento?

JGE: Cuatro

ACS: Cuatro metros

Maestra: ¿Cuál fue su trayectoria?

MCT: Nueve

Maestra: ¿cuánto? ¿Nueve en total?

Maestra: Entonces, cuento: 1, 2, 3,4, 5, 6

ACS y JGE: 16

Maestra: Siete, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 y 16, la persona hizo una trayectoria de 16 metros, pero hizo un desplazamiento de 4 metros.

Maestra: ¿Me podrían decir cuál es la diferencia entre la rapidez y la velocidad media?

JGE: Era algo relacionado con el camino corto y el camino largo, siempre tengo eso, pero no recuerdo bien.

Maestra: ¿El desplazamiento era el camino corto o el camino largo? ¿Alguien quiere ayudar?

JGE, ARA y MCT: Es el camino corto.

Maestra: Entonces, la velocidad media tiene que ver con [...] ¿el camino corto o el camino largo?

ACS Y ARA: largo.

Maestra: Con el camino corto, con el desplazamiento!

Los estudiantes no lograron relacionar o recordar la explicación que se les proporcionó en la Actividad 6 y en la Actividad 8. En esas Actividades se les mencionaba la diferencia entre la trayectoria y el desplazamiento y, por consiguiente, la relación con la rapidez y la velocidad. Sin embargo, se podría decir que se encuentran en los inicios de la etapa II: Icónica, ya que están trabajando en la construcción de la comprensión de las variables visuales, es decir, se dirigen hacia la objetivación.

A continuación, se presentan los resultados de las Actividades 7 y 8. En éstas se solicita a los estudiantes que realicen cálculos referentes a la rapidez y a la velocidad. En los intentos de explicar estos conceptos, algunos estudiantes lograron algunos avances entre la Actividad 7 y la Actividad 8.

Resultados del estudiante MCT:

Actividad 7

Para los 35 segundos.

t (s)	x (m)
0	0
5	10
10	20
15	30
20	20
25	10
30	0
35	-10

$$V_R = \frac{-10 \text{ m}}{35 \text{ s}} = -\frac{2}{7} \text{ m/s} \approx -0.2857142857 \text{ m/s}$$

$$V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} ; x_2 = -10 \text{ m}, x_1 = 0 \text{ m}$$

$$; t_2 = 35 \text{ s}, t_1 = 0 \text{ s}$$

$$V_m = \frac{-10 \text{ m} - 0 \text{ m}}{35 \text{ s} - 0 \text{ s}} = \frac{-10 \text{ m}}{35 \text{ s}} = -\frac{2}{7} \text{ m/s} \approx -0.2857142857 \text{ m/s}$$

¿cómo son los resultados entre la rapidez y velocidad media a los 35s? ¿qué significa?

1: $V_R = -0.2857142857 \text{ m/s}$ y $V_m = -0.2857142857 \text{ m/s}$.

El objeto se encuentra a -10m del origen, va en sentido contrario de su desplazamiento. (Duda)

Figura 4. 13. Resultado de la Actividad 7, correspondiente al estudiante MCT.

Los resultados muestran el mismo valor, tanto para la rapidez como para la velocidad. Se observa que al final del texto el estudiante escribió la palabra *Duda*, lo cual podría reflejar, hasta la Actividad 7, que aún no les había quedado claro el concepto de trayectoria descrita por un objeto en movimiento y su desplazamiento. La actividad 7 requiere de un proceso cognitivo más profundo que las seis anteriores, ya que tienen que traducir los resultados numéricos a una explicación narrativa, y que, al menos el resultado de la velocidad (-0.28 m/s) podrían visualizarla en un plano cartesiano y observarla como una línea con esa pendiente, no así el resultado de la rapidez, así que este proceso es más complejo encontrándose en la categoría uno, la cual a su vez pertenece a la etapa II: Icónica.

Actividad 8

c- Cuando calculaste la rapidez y velocidad media en la actividad 7 (¿cómo son los resultados entre la rapidez y velocidad media a los 35s? ¿qué significa?)

1.- Los resultados entre rapidez y velocidad media a los 35s son diferentes.

2.- La rapidez expresa la distancia que recorre la persona en determinado tiempo, mientras la velocidad expresa la diferencia de la posición inicial y posición final de la persona en determinado tiempo.

Figura 4. 14. Resultado de la Actividad 8, correspondiente al estudiante MCT.

En los resultados de la Actividad 8, las respuestas de los estudiantes son correctas, ya que señalan los conceptos involucrados en la rapidez y velocidad (trayectoria y desplazamiento) adecuadamente. Este proceso de comprensión se ubica en la categoría uno, la cual a su vez pertenece a la etapa II: Icónica.

Resultados del estudiante ARA

Actividad 7

t (s)	x (m)
0	0
5	10
10	20
15	30
20	20
25	10
30	0
35	-10

$$v_r = \frac{10 \text{ m}}{5 \text{ s}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_r = \frac{20 \text{ m}}{20 \text{ s}} = 2 \text{ m/s}$$

$$v_r = \frac{60 \text{ m}}{30 \text{ s}} = 2 \text{ m/s}$$

$$v_r = \frac{30 \text{ m}}{35 \text{ s}} = 2 \text{ m/s}$$

$$v_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{20 - 0}{5} = 4 \text{ m/s}$$

$$v_m = \frac{20 - 0}{20} = 1 \text{ m/s}$$

$$v_m = \frac{0 - 0}{30} = 0 \text{ m/s}$$

$$v_m = \frac{-10 - 0}{35} = -0.28 \text{ m/s}$$

¿cómo son los resultados entre la rapidez y velocidad media a los 35s? ¿qué significa?

La vel media es menor, esto porque para el tiempo que lleva en llegar a ambos puntos necesita menor velocidad. En lo que otro va y regresa a esa posición en un tiempo el otro apenas llegara.

Figura 4. 15. Resultado de la Actividad 7, correspondiente al estudiante ARA.

En la Actividad 7, los resultados respecto del cálculo de la rapidez y de velocidad son correctos, así como la noción de dichos conceptos. Al igual que los procesos del estudiante anterior, se encuentra en el desarrollo de la etapa II: Icónica, tendiente a la objetivación de los conceptos involucrados en la Actividad.

Actividad 8

c- Cuando calculaste la rapidez y velocidad media en la actividad 7 (¿cómo son los resultados entre la rapidez y velocidad media a los 35s? ¿qué significa?)

la rapidez es mayor a la vel media,
 Creo que significa, que para ir a un punto, tomando un atajo, va a menor velocidad pero tomara el mismo tiempo. que recorrer todo.

Figura 4. 16. Resultado de la Actividad 8, correspondiente al estudiante ARA.

La respuesta de este estudiante es correcta y en ésta habla de rapidez menor a la velocidad media, atajo, mismo tiempo. Estos conceptos están involucrados en las Actividades 7 y 8. Las respuestas de este estudiante evidencian que en este momento de trabajo con ellos empiezan a comprender estos conceptos, por lo que el proceso del desarrollo de encontrarse en el dominio de la categoría uno tiene un gran avance.

Resultados del estudiante JGE

Actividad 7

t (s)	x (m)
0	0
5	10
10	20
15	30
20	20
25	10
30	0
35	-10

$v_{A_5} = \frac{10-0}{5} = 2 \text{ m/s}$

$v_{A_{10}} = \frac{20-0}{10} = 2 \text{ m/s}$

$v_{A_{20}} = \frac{60}{30} = 2 \text{ m/s}$

$v_{A_{35}} = \frac{70}{35} = 2 \text{ m/s}$ hacia izquierda

$v_{m_5} = \frac{10-0}{5} = 2 \text{ m/s}$

$v_{m_{20}} = \frac{20-0}{20} = 1 \text{ m/s}$

$v_{m_{30}} = \frac{0}{30} = 0 \text{ m/s}$

$v_{m_{35}} = \frac{-10}{35} = -0.28 \text{ m/s}$

Figura 4. 17. Resultado de la Actividad 7, correspondiente al estudiante JGE.

¿cómo son los resultados entre la rapidez y velocidad media a los 35s? ¿qué significa?

Diferente, la rapidez siempre será positiva, ya que el desplazamiento será positivo ya que es la suma de todas las posiciones respecto al tiempo, a partir del origen, en cambio la velocidad media, puede ser positiva o negativa, ya que aquí si se considera su posición inicial y la final, tomando en cuenta donde se encuentra a partir del punto de origen, esto en relación con el tiempo, entonces si se encuentra a la izquierda la v_m es (-) y si esto a la derecha la v_m es (+).

Figura 4. 18. Resultado de la Actividad 7, correspondiente al estudiante JGE.

Este estudiante tiene confusión de significado entre las palabras de trayectoria y desplazamiento, ya que al explicar el concepto de rapidez y velocidad está muy cerca del significado. Para la rapidez explica que siempre será positiva e involucra a la suma de todas las posiciones (tal vez se refiere a la suma de todas las distancias). Respecto a la velocidad, señala que puede ser positiva o negativa, y que se considera la posición inicial y final, por lo que el proceso del desarrollo de encontrarse en el dominio de la categoría es más tardío en este estudiante.

Actividad 8

c- Cuando calculaste la rapidez y velocidad media en la actividad 7 (¿cómo son los resultados entre la rapidez y velocidad media a los 35s? ¿qué significa?)

Son diferentes, tengo dos velocidades, ya que para la rapidez se desplazara mas metros respecto a la velocidad media que es 0.28 m/s, entonces para llegar al mismo tiempo, la rapidez tiene que avanzar mas metros por segundo para ocupar la misma posición que la velocidad media en el mismo tiempo.

Figura 4. 19. Resultado de la Actividad 8, correspondiente al estudiante JGE.

La noción que el estudiante tiene de los conceptos de rapidez y de velocidad es cada vez más cercanos de los aceptados institucionalmente. En este momento, se podría decir que su proceso para estar en la categoría uno ha dado un paso más.

En las Actividades 7 y 8 se les pide, de nuevo, a los estudiantes, calcular rapidez media y velocidad media en diferentes intervalos de tiempo –correspondiente a la Actividad inicial–. En esta ocasión se trata de que el estudiante, además del uso de la fórmula explique el significado de cada uno de los dos conceptos que, institucionalmente, se indican como: "La rapidez promedio de una partícula, una cantidad escalar, se define como el cociente entre la distancia total recorrida y el tiempo total que lleva viajar esa distancia" (Serway, 2002, p. 27). "Conviene precisar que la rapidez promedio, generalmente, no se relaciona con la magnitud de la velocidad promedio" (Resnick, 2002, p. 19). "En general, la rapidez promedio de un objeto se define como *la distancia total viajada a lo largo de su trayectoria dividida entre el tiempo que le toma viajar esta distancia.....* La rapidez promedio y la velocidad promedio tienen la misma magnitud cuando todo el movimiento es en una dirección. En otros casos, ellas pueden diferir" (Giancoli, 2002, p. 18). Al revisar los resultados de los estudiantes, se observa que existe confusión entre estos dos conceptos, posiblemente, porque habría de analizarlos en su conjunto: rapidez y velocidad: media e instantánea o enfocarse exclusivamente a ellos en particular para un trabajo de tesis.

Actividad 10

En esta Actividad se pretende que el estudiante pueda identificar que una sola línea recta representa velocidad constante y, por lo tanto, está asociada con una función lineal; así mismo, pueda identificar que cuando se traten de varias pendientes en un mismo movimiento, éstas representan velocidad variable. Entonces, diferentes pendientes de rectas serán relacionadas con la función cuadrática y, por lo tanto, el movimiento del objeto presenta una aceleración, así como una sola línea durante todo el movimiento representa una misma velocidad (constante) y, por lo tanto, no existe aceleración. Se le explica al estudiante que dos personas tienen las siguientes posiciones en determinado tiempo y que ubique esos puntos en un eje cartesiano y debe unir los puntos.

Resultado del estudiante MCT

Actividad 10

a) ¿Cuántos segmentos de líneas rectas hay con diferente pendiente para la persona A?
Sol: Hay 1 segmento de línea recta con 1 pendiente.

b) ¿Cuántos segmentos de líneas rectas hay con diferentes pendientes para la persona B?
Sol: Hay 4 segmentos de líneas rectas con diferentes pendientes.

c) ¿Existe cambio de velocidad para la persona A? ¿Cuáles fueron sus velocidades en cada uno de los intervalos?
1: Sol: No existe cambio de velocidad para la persona A.

d) ¿Existe cambio de velocidad para la persona B? ¿Cuáles fueron sus velocidades en cada uno de los intervalos?
1: Sol: Si existe cambio de velocidad para la persona B.
2: Sol: $v_1 = 0.5 \text{ m/s}$, $v_2 = 1 \text{ m/s}$, $v_3 = 1.5 \text{ m/s}$, $v_4 = 2 \text{ m/s}$

Figura 4. 20. Resultado de la Actividad 10, correspondiente al estudiante MCT.

e) ¿cuál es la aceleración media para la persona A, en cada uno de los intervalos?

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$
$$a = 0 \text{ m/s}^2$$

f) ¿cuál es la aceleración media para la persona B, en cada uno de los intervalos?

$$a = 0.25 \text{ m/s}^2$$

El movimiento con velocidad constante se identifica con una recta- función lineal-, en tanto que el movimiento con velocidad variable (aceleración constante) se identifica con una función cuadrática.

Figura 4. 21. Resultado de la Actividad 10, correspondiente al estudiante MCT.

Actividad 10

a) ¿Cuántos segmentos de líneas rectas hay con diferente pendiente para la persona A?
ninguna, ya que todos los puntos tienen la misma pendiente.

b) ¿Cuántos segmentos de líneas rectas hay con diferentes pendientes para la persona B?
34, 30 pendientes que son iguales a los que antes tenían pendientes iguales, las otras son diferentes.

c) ¿Existe cambio de velocidad para la persona A? ¿Cuáles fueron sus velocidades en cada uno de los intervalos?
NO, la velocidad para cada uno de los intervalos fue $\frac{1}{2}$.

d) ¿Existe cambio de velocidad para la persona B? ¿Cuáles fueron sus velocidades en cada uno de los intervalos?
Sí para el primer intervalo fue $\frac{1}{2}$, el segundo 1, tercero $\frac{3}{2}$, cuarto 2.

Figura 4. 22. Resultado de la actividad 10 correspondiente al estudiante JGE.

e) ¿cuál es la aceleración media para la persona A, en cada uno de los intervalos?

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

Es cero ya que todas las velocidades son iguales, y al hacer la resta es cero. $a = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{2 - 2} = \frac{0}{1} = 0 //$

f) ¿cuál es la aceleración media para la persona B, en cada uno de los intervalos?

Intervalo 1: $\frac{0.5 - 0}{2 - 0} = 0.25 \text{ m/s}^2$ Intervalo 2: $\frac{1 - 0.5}{4 - 2} = 0.25 \text{ m/s}^2$

Intervalo 3: $\frac{1.5 - 1}{6 - 4} = 0.25 \text{ m/s}^2$ Intervalo 4: $\frac{2 - 1.5}{8 - 6} = 0.25 \text{ m/s}^2$

Figura 4. 23. Resultado de la Actividad 10, correspondiente al estudiante JGE.

Los estudiantes no tuvieron dificultades ni en el cálculo del valor de las velocidades ni en las aceleraciones ni tampoco en relacionar una misma pendiente con una función lineal. Fueron capaces de explicar que diferentes pendientes de rectas se relaciona con una función cuadrática. Aquí, se dan los inicios hacia la comprensión de la categoría

dos (conversión de registros) mirar las líneas e identificar el tipo de función que le es más familiar al estudiante, entonces la categoría dos se inicia sin dificultad.

La Actividad 10 es similar a la Actividad 9, ya que ambas están orientadas a dar significados a las unidades significantes de las formas de las líneas en el gráfico. En esta ocasión, se relacionan las pendientes de las rectas con la velocidad y las formas (recta o curva) con las expresiones algebraicas: lineal o cuadrática. Así mismo, se relaciona la magnitud de la velocidad (rapidez) con el tipo de velocidad-constante o variable. "Es útil recordar que *sólo* el signo de la velocidad se determina por la dirección del movimiento. El del desplazamiento depende de la ubicación o la posición del objeto, en tanto que el de la aceleración queda determinado por la fuerza que hace que la velocidad cambie" (Tippens, 2011, p. 119). Una pendiente pronunciada hacia arriba representa una velocidad instantánea grande; una pendiente igual a cero (línea horizontal) indica una velocidad de cero, y una pendiente hacia abajo denota una velocidad negativa (hacia atrás). Al mirar la pendiente de la gráfica sabremos todo lo que necesitamos respecto a la velocidad del carrito (Griffith, 2014, p. 28). Los resultados de esta Actividad fueron excelentes ya que la referencia del plano cartesiano favoreció la "lectura" de las formas de *ver* las líneas y se logró que los estudiantes al mirar un gráfico pudieran decir hacia dónde se realiza el movimiento, el tipo de velocidad (constante o variable) y las veces que pasaba por el origen.

Los resultados de las Actividades realizadas por los estudiantes evidencian que lograron comprender los conceptos de posición, trayectoria, desplazamiento, relación entre las líneas (recta o curvas) con el tipo de velocidad y tipo de función, así como el sentido del movimiento según la forma de las líneas (hacia arriba, hacia abajo). Se logró llevar a cabo correctamente el cálculo del valor de la velocidad y de la rapidez, incluso, de explicar la diferencia entre ambos conceptos, pero aún no se lograban interpretar gráficamente el valor de los resultados de estos dos conceptos, sin embargo, en las entrevistas se les mostró gráficamente, por medio de una maqueta, la línea que representaba el valor, tanto de la rapidez como la velocidad.

El nivel de conocimiento que los estudiantes lograron fue el de aprehensión ICÓNICA relativo al nivel II, dominante, particularmente, en la discriminación de las características figurales intrínsecas, las variables visuales cualitativas (que no ocurre al

primer golpe de ojo), observando desplazamientos y trayectorias de subida o de bajada en relación con un nivel horizontal (u origen). Por lo tanto, lograron establecer analogías con cambios de posición [del objeto en movimiento] en el espacio físico real (estar más alto, más bajo), relieve, moverse hacia la derecha, izquierda, en reposo, valor y tipo de velocidad (constante o variable).

4.4. Análisis de datos de acuerdo con la segunda categoría: Relación entre representación gráfica y simbólica (cambios de registro)

En el nivel III de aprehensión GLOBAL CUALITATIVA se muestra la discriminación de las características entre dos tipos de registros diferentes. *Ver* desde un punto de vista matemático, es decir, con la manera de *ver* que permita visualizar una relación entre dos conjuntos de valores, "el cambio de registro", es decir, la conversión de las representaciones, permiten definir, luego introducir, un principio de variación cognitiva que hace visibles las unidades significantes pertinentes del contenido de las representaciones de un registro escogido. Se pueden así definir las variables cognitivas esenciales para analizar cognitivamente y *a priori* las tareas matemáticas propuestas a los alumnos" (Duval, 2001, p. 74).

A continuación, se comparte los resultados que los estudiantes obtuvieron en la resolución de las Actividades de las secuencias didácticas y se realiza un comentario relativo al proceso de pasar al nivel III (GLOBAL CUALITATIVA).

Actividades 11 y 12

En seguida, se muestra cómo la interacción entre dos tipos de registros diferentes tabular y gráfico, donde a partir de una serie de datos se determina la forma (una sola pendiente o varias de éstas a partir de rectas en el plano coordenado) de los gráficos. A partir de la forma de las distintas representaciones [de las rectas] se determina la expresión algebraica (gráfico-algebraico), llevando a cabo la discriminación de valores visuales al realizar el cálculo de la velocidad y la aceleración, y al conocer estos valores se identifica el tipo de velocidad y, por consiguiente, se determina el procedimiento algorítmico para conocer las expresiones algebraicas.

Resultados del Equipo 1 (estudiantes MCT y MRG)

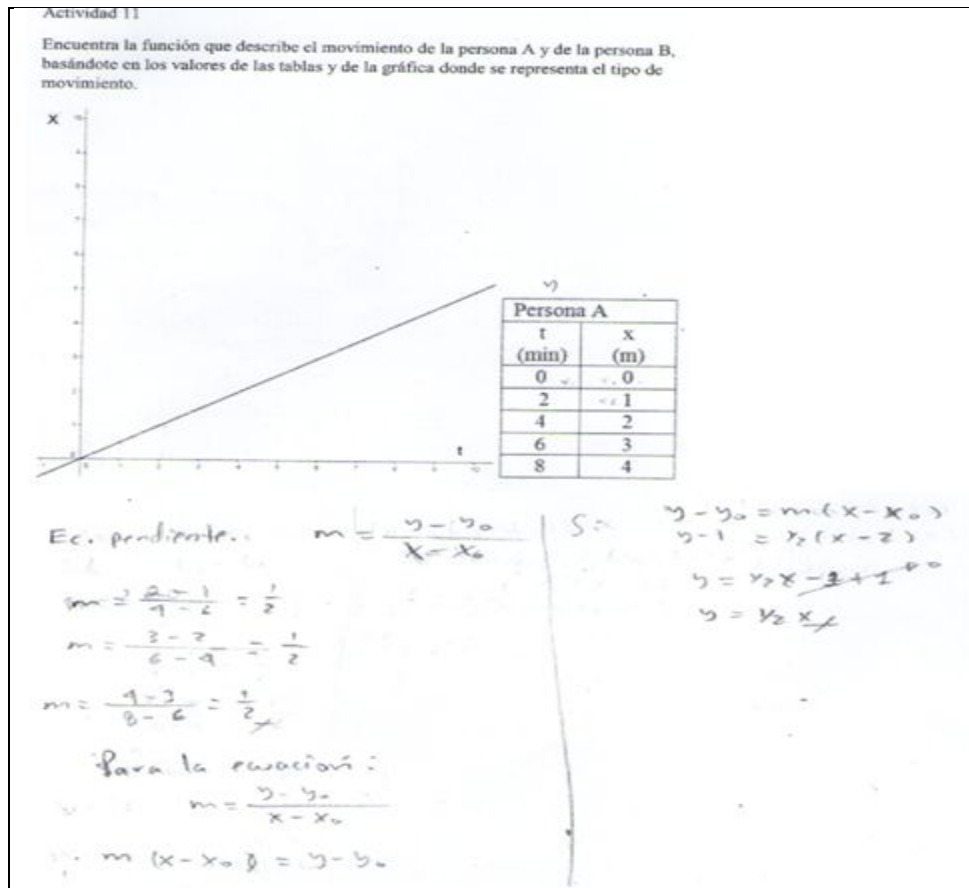


Figura 4. 24. Resultado de la Actividad 11, correspondiente al Equipo 1.

Al utilizar la ecuación de la pendiente, el estudiante realiza una discriminación de variables respecto a la tabla: en la tabla escribe la letra Y, posiblemente, para relacionar las variables de la tabla (t, x) con las variables de la ecuación de la pendiente (x, y) logrando identificar que la letra Y es sustituida por X (representa las posiciones) y la X es sustituida por t (representa el tiempo). Es probable que este trabajo, descrito previamente, el estudiante lo haya hecho con la finalidad de optimizar cálculos, sin embargo, la respuesta es presentada con las variables acostumbradas para él, y no con las variables en cuestión.

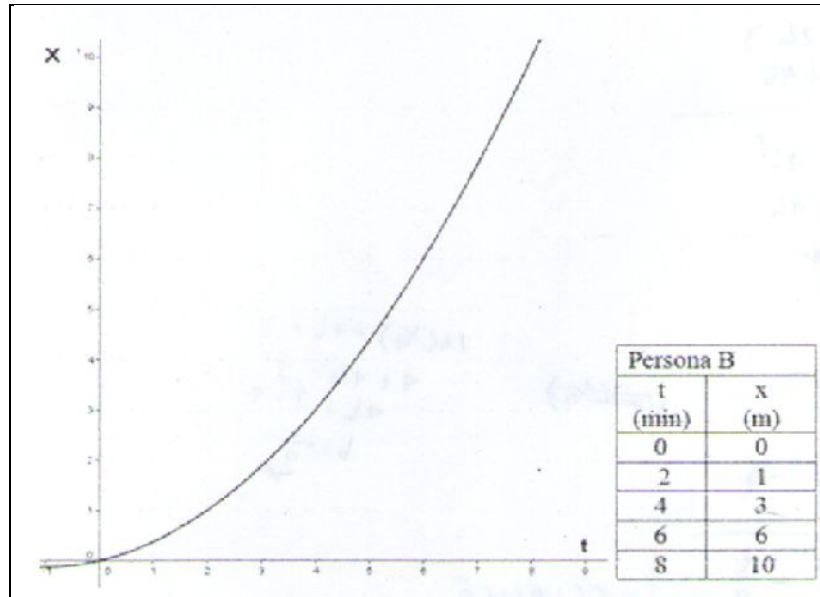


Figura 4. 25. Actividad 11, correspondiente al Equipo 1.

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow x = at^2 + bt + c$$

Si $x=0$: $0 = a(0)^2 + b(0) + c$
 $0 = c$
 $\therefore c = 0$

Así $x=1$: $1 = a(2)^2 + b(2) + 0$
 $1 = a(4) + 2b$
 $1 = 4a + 2b$

Si $x=3$: $3 = a(4)^2 + b(4) + 0$
 $3 = a(16) + 4b$
 $3 = 16a + 4b$

Así la ecu. $\begin{cases} 1 = 4a + 2b \\ 3 = 16a + 4b \end{cases}$

Así el S.E.L
 $\begin{cases} 1 = 4a + 2b \\ 3 = 16a + 4b \end{cases}$

Figura 4. 26. Resultado de la Actividad 11, correspondiente al Equipo 1.

En la Figura 4.26 se observa el cambio de variable. Los integrantes de este equipo llevan a cabo procedimientos correctos en la sustitución de los valores. Mediante el uso de estos algoritmos llegan al sistema de ecuaciones lineales. Dado que esta Actividad se llevó a cabo en parejas, uno de los integrantes del equipo resolvió este sistema y llegó al resultado correcto. Al final del proceso de solución, este estudiante escribió la ecuación de posición del objeto en movimiento en función del tiempo, tal como se muestra en la siguiente figura.

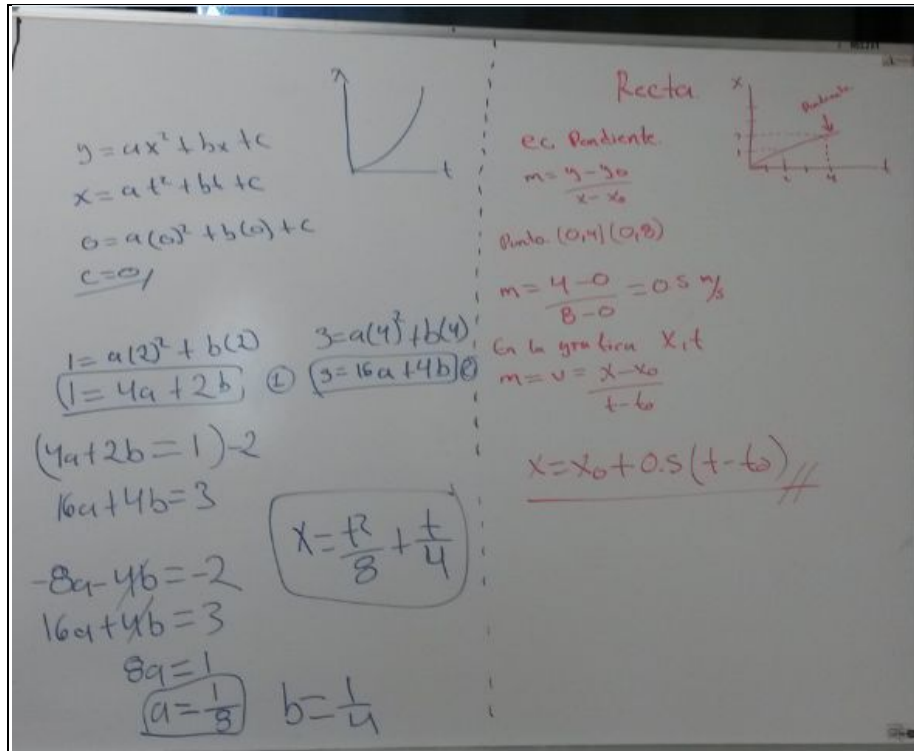


Figura 4. 27. Resultados del Equipo 1.

Resultados del Equipo 2 (estudiantes JGE, ARA y ACS).

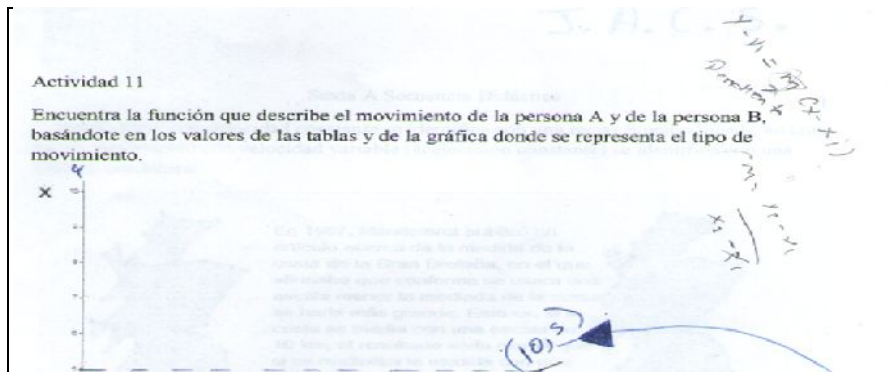


Figura 4. 28. Resultado de la Actividad 11, correspondiente al Equipo 2.

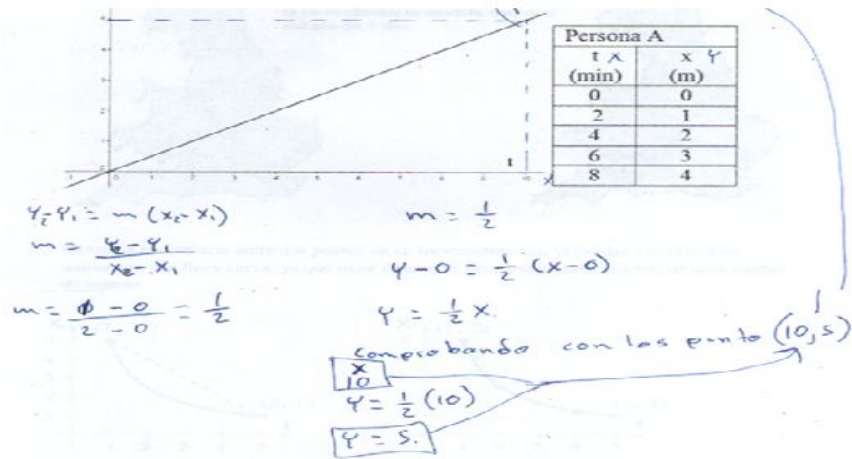


Figura 4. 29. Resultado de la Actividad 11, correspondiente al Equipo 2.

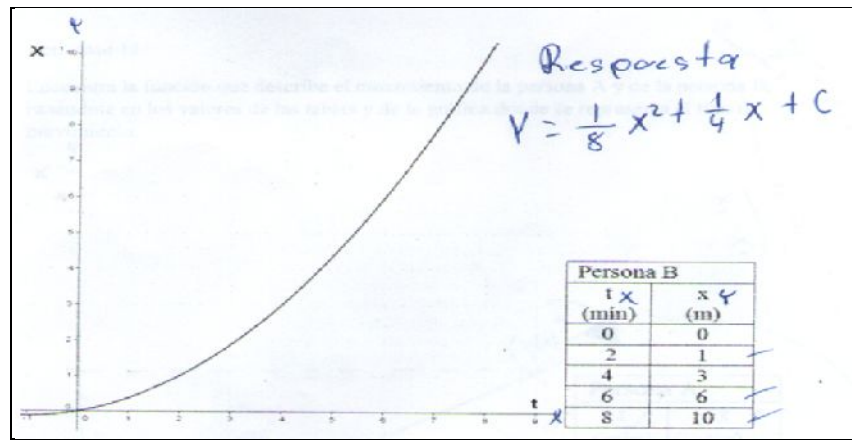


Figura 4. 30. Resultado de la Actividad 11, correspondiente al Equipo 2.

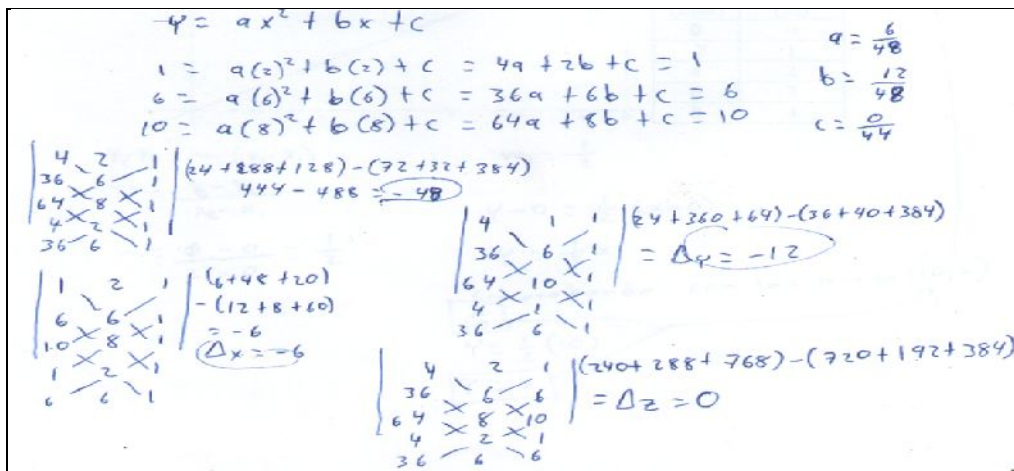


Figura 4. 31. Resultado de la Actividad 11, correspondiente al Equipo 2.

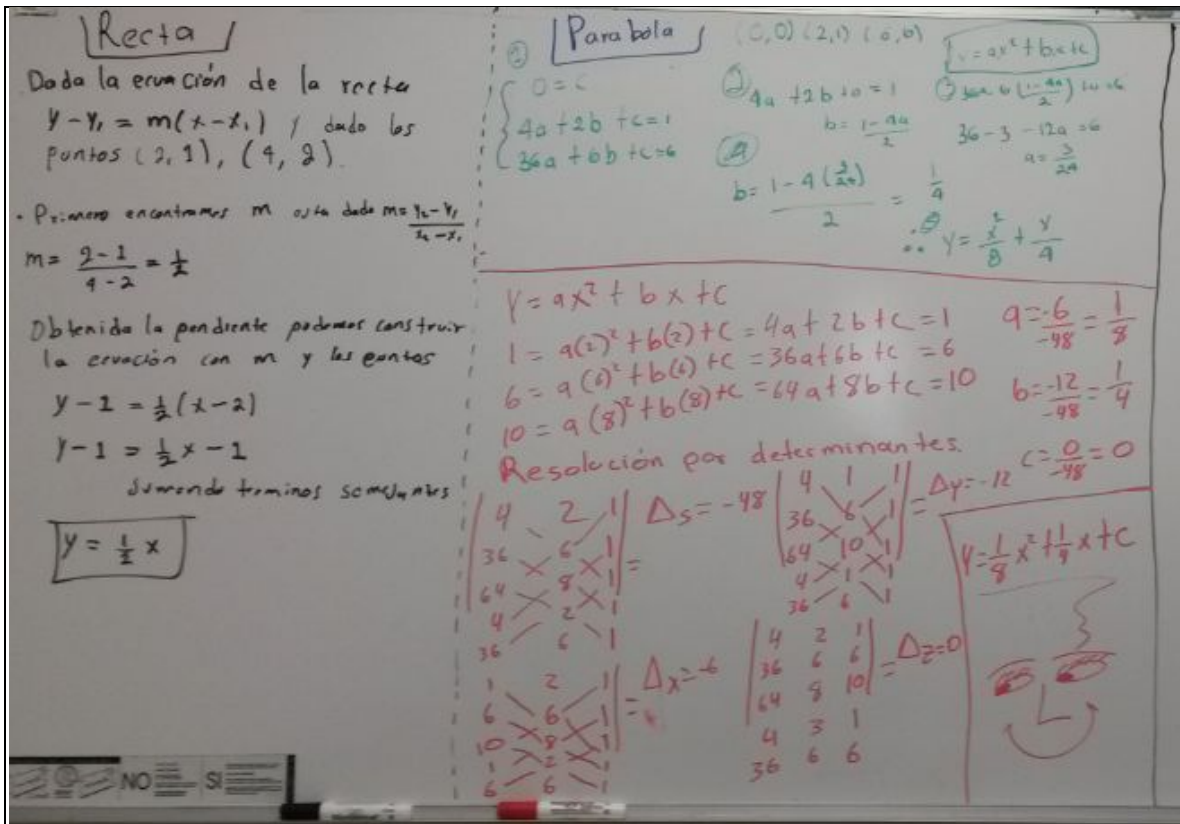


Figura 4. 32. Resultados de la Actividad 11 del Equipo 2.

Se observa que los estudiantes estaban familiarizados con los algoritmos, ya que en esta Actividad no existieron dificultades de cálculo al aplicar los algoritmos correctos. Por lo que se puede resumir que la categoría 2 (conversión) es dominada por los estudiantes. En la Figura 4.32 se observa que los integrantes de este equipo realizaron muy bien los cambios de variable y relacionaron las distintas formas de las representaciones (línea recta y curva) con el grado de la función. A continuación, se muestra la Figura donde el grupo de estudiantes, toma asesorías. Con este grupo se implementaron las Actividades.



Figura 4. 33. Grupo de Estudiantes, trabajando en equipo en la solución de las Actividades.

4.5. Análisis de datos de acuerdo con la tercera categoría: Procesos iniciales de Objetivación

Las señales [gestos] que los estudiantes muestran en el momento que entienden algo son distintas. Por ejemplo, en la Figura 4.35 se puede observar que a medida que se iban realizando las Actividades el estudiante mostraba cambios favorables en la comprensión de los conceptos, es decir, lo que antes no entendía, ahora lo señala con movimientos corporales. En el momento que entendían el concepto en discusión hacían una expresión como haaaa! o mmmmm!, o bien, asentían con la cabeza, o también cuando trataban de interpretar el movimiento representado en una gráfica, los estudiantes movían las manos hacia donde creían que se daba el movimiento.

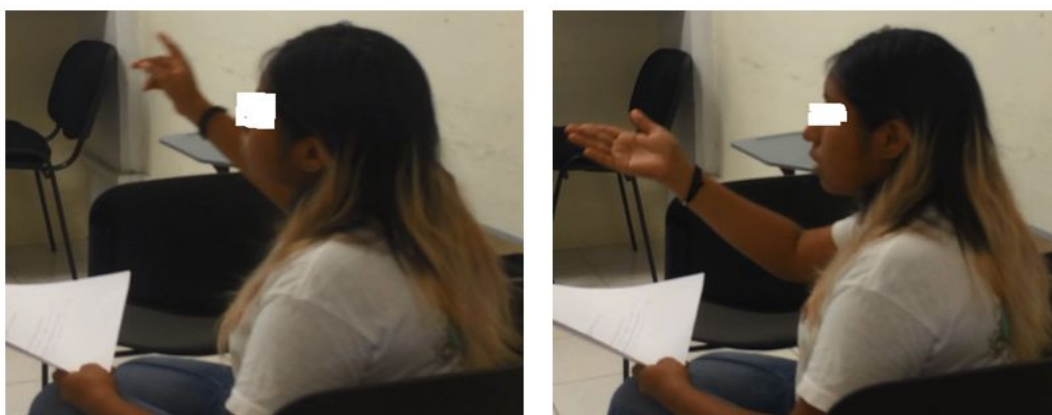


Figura 4. 34. Estudiante señalando el sentido del movimiento.

En las entrevistas, tres de cuatro estudiantes realizaban sus interpretaciones de gráficas utilizando las expresiones de "el camino largo" y "el camino corto" para referirse a trayectoria y desplazamiento, respectivamente. Los gestos, movimientos corporales, expresiones verbales de admiración, lapsos de análisis de gráficos, de resultados, de procesar la información abriendo los ojos más de lo normal, que mostraron durante la entrevista y en la actividad verbal 12 dan señales de objetivación.

4.6. Análisis de datos surgidos de la entrevista

El objetivo de la entrevista fue de comparar y detectar los conocimientos de los estudiantes [mediante las acciones que ellos realizaran] –en la interpretación de gráficos de un movimiento rectilíneo– del antes y después de la aplicación de las Actividades, aclarar los resultados que fueron considerados incorrectos o incompletos en el momento que ellos

realizaron las Actividades. Durante la resolución de las Actividades, cada uno de los estudiantes presentó, de forma general, un tipo de dificultad, el perteneciente a la interpretación icónica. Darle significado a cada una de las unidades significantes indicadas en la Tabla 4.3 requiere de tiempo para los cambios en la estructura cognitiva. De acuerdo con Tall y Vinner (1981):

La información sensorial estimula ciertas vías neuronales e inhabilita otras. De esta manera, la estimulación puede activar diferentes partes de la imagen del concepto, desarrollándolas de manera que no necesita ser todo coherente. [...] es posible que los puntos de vista conflictivos sean presentados en la mente de un individuo dado en tiempos diferentes, sin que el individuo esté consciente del conflicto hasta que sean evocados simultáneamente. (p. 7, *The Psychology of advanced mathematical thinking*)

Es posible que esto haya sucedido en los estudiantes, ya que incluso en el momento de la entrevista cuando explicaba la interpretación del gráfico se observó que el estudiante tenía procesos de objetivación. Por otra parte, se menciona que "Numerosas observaciones y encuestas han mostrado que dos tercios de los alumnos durante todos sus estudios no han pasado de la manera de ver I a la III y que es la manera de ver II la interpretación dominante" (Duval 2001, p. 66).

4.6.1. Entrevista del estudiante ACS

Se le pide al estudiante que describa de nuevo la Gráfica 1, mostrada en la evaluación diagnóstica (véase Anexo). En seguida, se da evidencia de la discusión ocurrida entre la Maestra y el Estudiante cuando éste trata de explicar su razonamiento a la Maestra.

[1] Maestra: ¿Podrías volver a explicar la Gráfica 1?

[2] Estudiante ACS: Lo que pasa es que me había confundido, ahora le puedo decir que si lo vemos en cuestión de distancia, podemos decir que recorrió cuatro metros en cuatro segundos. Por decir, se mantuvo un segundo sin movimiento y de ahí empezó a avanzar hasta recorrer dos metros en 1, 2, 3, 4 segundos otra vez.

[3] Maestra: [*señala la línea del intervalo de 0 a 4 segundos y pregunta*] ¿entonces esta línea no quiere decir que aumenta su velocidad?

[4] ACS: No.

- [5] Maestra: Entonces estaríamos diciendo que es una velocidad [...] ¿qué?
- [6] ACS: Habría que calcularla [*la línea señalada por la maestra*], me está indicando la distancia que recorrió en tanto tiempo.
- [7] Maestra: Si tú ves los cuadritos [*señala las líneas cuadrículadas*] ¿podrías calcular el valor de la velocidad?
- [8] ACS: Mmmm [...] se podría calcular, por decir, la velocidad es distancia sobre tiempo, entonces se podría decir que al primer punto [*se refiere al punto final de la primera línea recta*] iba a 1 m/s porque son 4 entre 4, y ahí se detuvo transcurrió lo que es un segundo y de ahí comenzó con una velocidad de [...] ahora sí [...] de 6 entre [...] [*Se nota confundido*] habría que hacer unos cálculos.
- [9] Maestra: Puedes contarlos si quieres [*se refiere a los cuadritos*] aquí hay una calculadora.
- [10] ACS: Sería entonces [...], pero lo que aquí sí tuve una duda; es de que si se toma en cuenta la velocidad que lleva acá [*señala el primer intervalo de tiempo*] [...] o empiezo yo [...] por decir yo acá puedo decir [...] sería [...] son [...] 6 entre 8, 9 entre 9, sería entonces [...] 6, 3, mmm, no 2/3, 2 metros por 3 segundos [...] ahí es donde yo me [...] [*Se aleja de la imagen proyectada en el pintarrón*].
- [11] Maestra: ¡Ha! Okay, por ejemplo, aquí [*señala la línea recta del primer intervalo*] en el intervalo de 0 a 4, tú me dijiste que tiene una velocidad de 1 m/s; en todo ese tiempo estuvo caminando 1 m/s [*desliza el dedo sobre el eje vertical de 0 a 4 metros*].
- [12] ACS: Exactamente [*observa con detenimiento*].
- [13] Maestra: Me decías que se detuvo en ese lugar [*señala la línea horizontal del segundo intervalo 4 a 5 segundos*] por un segundo o un minuto, una unidad de tiempo verdad?
- [14] ACS: [*Confirma la afirmación de la Maestra*] mmjj.
- [15] Maestra: Posteriormente, allá continuó ¿hacia dónde? [*Apunta en cuatro metros sobre el eje vertical.*]
- [16] ACS: Sigue caminando [...] ¡Entonces, ahí! [*Se nota que ya lo entendió, se acerca al pintarrón*] Se tomaría a partir de este punto [*señala cinco segundos*] hasta acá [*señala el*

punto inicial y final de la línea recta del tercer intervalo de 5 a 9 segundos]. Entonces, iría por decir a medio metro por segundo.

[17] Maestra: ¡Exacto! ¡Perfecto!

[18] Maestra: Ahora, voy a pasar a la Secuencia didáctica 1. Voy a poner esta imagen [*imagen del resultado de la Actividad 3*] me llama la atención la forma en que graficaste el tiempo.

[19] Maestra: Fíjate que en cuestiones de espacio, esta persona se fue caminando para acá dio media vuelta pasó otra vez por aquí [*señala el origen*] y regresar acá [*señala -10 metros*]. Yo tengo duda en el tiempo [*en cómo fue interpretado por el estudiante*], porque le hiciste así [*señala hacia la derecha hasta 15 segundos*] y después le hiciste así [*señala hacia la izquierda hasta cinco segundos después del origen*].

[20] ACS: Pues, lo que pasa es que acá la gráfica que Usted nos dijo que no era conveniente usar este tipo de gráfica, porque lo detallado [*usa la mano y realiza un movimiento sobre el pintarrón señalando un eje horizontal y uno vertical*] que era mejor....

[21] Maestra: Plano cartesiano [*interpreta lo que quería decir el estudiante*].

[22] ACS: Ajá, plano cartesiano, entonces a mí se me ocurrió, pues si se supone que va a recorrer este trayecto en tanto tiempo, digo entonces para que yo no me confunda, pues lo pongo igual a éste. Y, entonces, se supone, si en 30 metros recorrió [*señala las líneas de color verde en ambos esquemas*] pasó 15 segundos de tiempo, pero siempre empezando del mismo punto [*señala el origen en ambos esquemas*] nada más que aquí es tiempo y aquí es posición y en la otra [*señala la línea color rojo*] y a la hora de regresar, pues el regreso para acá a menos 10 metros, pero aquí ya lo tengo en tiempo para que no haya confusión [*señala la posición final y el tiempo final*].

[23] Maestra: Vimos que no era tan práctica esta forma de graficar, porque había confusiones y al final lo recomendable es el plano cartesiano [*dibuja un plano cartesiano en el pintarrón*].

[24] Maestra: ¿Podrías ir poniendo esa misma gráfica aquí? [*Solicita que grafique en el plano cartesiano, el esquema anterior.*]

- [25] ACS: Sí [*el estudiante realiza la transformación del esquema a la gráfica en el plano cartesiano; dibuja primero las coordenadas que representan los tiempos y posiciones y, posteriormente, une todos los puntos; así obtiene dos líneas rectas: una con pendiente positiva y la otra con pendiente negativa. Realiza la transformación con una pequeña confusión, pero inmediatamente la corrige y la termina correctamente. Al mismo tiempo va explicando verbal y corporalmente el movimiento que la persona realiza*].
- [26] ACS: [*Al trazar las líneas va mencionando hacia dónde se dirige la persona, señala también el momento que pasa por el origen nuevamente y donde termina la posición final de la persona*].
- [27] ACS: Esta fue su trayectoria [*señala con la mano las líneas que dibujó*], pero en realidad su desplazamiento fue de 10 metros [*no toma en cuenta el signo*] el tiempo fue de cinco segundos ¿no?
- [28] Maestra: El mismo tiempo que el otro tarda en el camino largo.
- [29] ACS: ¡Ajá! Exactamente, de 35 segundos, el desplazamiento de él fue en realidad de diez metros en 35 segundos, se podría decir que iba a un metro por [...] por 3.5 segundos.
- [30] Maestra: [*Proporciona una calculadora al estudiante*] Aquí, podemos hacer la división que sería distancia entre tiempo....
- [31] ACS: Distancia entre tiempo [*lleva a cabo la división*] sería 0.28 m/s [*no toma en cuenta el signo negativo*].
- [32] Maestra: Pero si tomamos en cuenta la fórmula de desplazamiento [*escribe la ecuación en el pintarrón*] es el cambio de la posición de $x_2 - x_1$, para ti ¿quién sería x_1 ?
- [33] ACS: x_1 sería en el origen [*coloca su dedo en el origen*].
- [34] Maestra: Sería ¿qué valor?
- [35] ACS: x_1 sería cero y a x_1 se le va a restar lo que sería x_2 , que es la [...] final y sería -10 [*observa con detalle el valor en la gráfica y realiza la diferencia*] y este, quedaría -10 metros.
- [36] Maestra: Exactamente.... sobre 35 ¿verdad?

[37] ACS: 35

[38] Maestra: Para calcular qué.... ¿rapidez o velocidad?

[39] ACS: ¡Eh! [...] La velocidad [*escribe el signo de igual y anota 0.28 m/s sin tomar en cuenta el signo*].

[40] Maestra: ¿Y qué signo tendría positivo o negativo?

[41] ACS: [*Lo piensa por un momento*] Aquí donde [...] negativo sería [*coloca el signo negativo a la cantidad de 0.28 m/s*] es como qué retrocedió [*mueve las manos haciendo círculos verticales hacia él y camina hacia atrás*].

[42] Maestra: El signo nos está diciendo justamente lo que tú estás diciendo: que retrocedió.

[43] ACS: Del origen en vez de ir para delante se fue para atrás.

[44] Maestra: Y ¿cómo calcularías la rapidez? La rapidez te recuerdo es la trayectoria entre el tiempo total [*escribe la ecuación en el pintarrón*].

[45] ACS: Entonces, se sumaría toda la trayectoria [*señala la recta con pendiente positiva*] sería 30 metros más 40 metros [*señala la recta con pendiente negativa*] son 30 de ida y 40 de regreso, son 70 metros.

[46] Maestra: ¿Entre?

[47] ACS: Entre el tiempo total, son 35 [...] Sí 35 segundos y aquí equivale a... [*toma la calculadora para realizar la división*] 70 entre 35... a 2 m/s.

[48] Maestra: ¡Bien! Me da gusto de que ahora que estamos retomando esas respuestas, tú estás aclarándome las dudas que tenía. En efecto, el desplazamiento es -0.28 y el signo es porque retrocede [*la maestra se equivoca al señalar este dato, debió decir: la velocidad es*] y la trayec... [*corrige*] la rapidez da 2 m/s, bueno en este caso la rapidez siempre es positiva, no nos indica si va para la izquierda [...], sino que es toda la distancia.

[49] Maestra: Ahora, la última pregunta [*dibuja en el pintarrón la gráfica 1 de la evaluación diagnóstica y señala la línea del primer intervalo*] tú me dijiste muy bien el

valor de la velocidad de este trayecto 4 sobre 4 lo cual era 1 m/s , esto quiere decir que por cada

[50] MCS: Segundo recorría un metro.

[51] Maestra: ¡Ajá! ¿Qué piensas tú de ese 2 [*señala el resultado de la rapidez*] y retomamos, ¿qué piensas tú de ese -0.28 [*señala el resultado de la velocidad*]. O sea ¿qué significará la rapidez que ahorita la está representando ese número 2?

[52] ACS: Pues, podríamos decir que es la velocidad [...] que es la aceleración con la que iba [*señala las líneas en la gráfica*] y... ese $-0.28 m/s$ sería el [...] [*se queda pensando*] o sea, ese es el camino corto y este es el camino largo [*señala al $-0.28 m/s$ para el camino corto y $2 m/s$ para el camino largo*] o sea él va a $2 m/s$ [*pasa el dedo sobre las líneas en la gráfica*], pero en realidad éste [*señala el valor de $-0.28 m/s$*] por el camino corto sería $-0.28 m/s$, o sea en lo que éste [*señala el valor de $2 m/s$*] recorre todo el trayecto a esta velocidad, él [*señala el valor de $-0.28 m/s$*] lo recorre, el desplazamiento en [*señala de nuevo el valor de $-0.28 m/s$*].

[53] Maestra: Una velocidad muy pequeña.

[54] ACS: Muy pequeña, ¡exactamente! Para que lleguen los dos al mismo tiempo.

[55] Maestra: Para finalizar [*la maestra muestra una maqueta de corcho donde está dibujado un plano cartesiano y unos popotes de color rosa que representan las líneas de los dos intervalos de tiempo: ida y vuelta, y el popote de color verde representa la línea que une la posición inicial con la posición final*] te voy a mostrar qué es el 2 y qué era el 0.28. Mira, si yo agarro la trayectoria y la estiro, justo observo que es 35 segundos en 70 metros [*coloca el extremo del popote en la coordenada 35, 70 del plano cartesiano, convirtiéndose en una sola línea las que anteriormente eran dos líneas*]. Está pendiente, que tú ves aquí [*señala con la mano la pendiente*] es haber tenido el 70 entre 35, por eso te da 2. Está pendiente es ese 2. Y, está pendiente de por sí, pues es una pendiente pequeña porque es 10 negativo entre todo esto [*señala los 35 segundos*], pues es una pendiente más suave, negativa porque está hacia abajo.

[56] Maestra: Muy bien, pues está claro, está clara tu respuesta. Has expresado bien la diferencia de [entre] la velocidad y la rapidez.

4.6.1.1. *Recapitulación sobre los resultados obtenidos de la entrevista del estudiante ACS*

Durante la entrevista, el estudiante ACS mostraba avances en cuanto a la comprensión de los conceptos en cuestión; por ejemplo, iba cambiando la manera de *ver* los grafos [2], [16], [25], [26], [41] y [43], lo que le permitía codificar y decodificar matemáticamente las gráficas dentro de un sistema de representación; este sistema de representación está señalado en la Tabla 4.3. Las diversas evidencias del avance conceptual y teórico de este estudiante, mostradas cuando se analizó la entrevista, constatan las bondades de las Actividades diseñadas para tal fin. Por ejemplo, en el video se observan momentos de objetivación [cuando su tono de voz muestra seguridad, o sus ojos se abren más de lo normal, se acerca más para señalar algo con seguridad, mueve su cuerpo y manos hacia donde se dirige el objeto], ahora el estudiante tiene más seguridad al expresar los conceptos de trayectoria, desplazamiento, rapidez y velocidad, respondiendo de acuerdo con los aceptados institucionalmente.

4.6.2. *Entrevista del estudiante JGE*

[57] Maestra: ¿Podrías describir nuevamente esta gráfica? [*Se muestra la gráfica 6 de la evaluación diagnóstica.*]

[58] JGE: Ahora le entiendo mejor, puedo concluir que esta persona, desde el punto inicial, más bien desde el tiempo cero, mejor dicho empieza en el punto 6, o sea 6 metros desplazado desde el origen [*mueve la mano derecha*]. Entonces, al transcurrir el tiempo esta persona tiene una velocidad; se puede decir que es variable porque existe una aceleración y por eso se puede observar que tiene esa forma parabólica [*mueve la mano en forma curva*] y al minuto cuatro esta persona llega a lo que viene siendo el origen... y pasa por el origen, perdón, y sigue hasta se podría decir su trayectoria hasta -4 en el, en el tiempo.... que sería 6.

[59] Maestra: Este es 5, este es 6 y este 7 [*señala los valores del tiempo*].

[60] JGE: O sea ¡sigue! más bien esta persona desplazándose después del origen, hacia la izquierda después del origen.

[61] Maestra: [*Muestra la gráfica 1 de la evaluación diagnóstica*] Las líneas aquí ¿qué te indican acerca de la velocidad?

[62] JGE: Se podría decir que en lapsos puede ser constante, pero en cierto [...] puedo observar que un minuto, un segundo dependiendo del tiempo esta persona se detuvo; por eso se ve que ese lapso [*coloca su mano de forma horizontal*] o esa pendiente más bien como decía en asesorías, esa, o sea no existe pendiente. Va después de ese lapso, empieza otra vez lo que viene siendo una pendiente positiva y viene siendo igual [a] velocidad constante.

[63] Maestra: Es correcto, entonces una línea nos representa una velocidad constante y una forma curva o parabólica nos representa...

[64] JGE: Velocidad variable.

[65] Maestra: Entonces, ya me queda claro tu respuesta ahora; entonces nos vamos a pasar a la Actividad 5. En la Actividad 5, comienzo dándole las fórmulas para calcular la rapidez y para calcular velocidad. La rapidez se calcula dividiendo la trayectoria, que es toda la distancia que recorre, en este caso la persona, entre todo el tiempo que tardó en recorrerla. Y el desplazamiento es la posición final menos la posición inicial, entonces aquí [*se refiere a los resultados del estudiante*] ¿podrías por favor leer? [*Se refiere a la pregunta que se le hace en esa Actividad*] ¿Cómo son los resultados entre la rapidez y la velocidad a los 35 segundos? ¿Y qué significa? Entonces, tus cálculos en esta primera parte veo que pones [*la maestra escribe los resultados del estudiante en el pintarrón* $v_R = 2 \text{ m/s}$, $v_m = -0.28 \text{ m/s}$] ¡eso! La respuesta a la cantidad es correcto, en donde yo tengo dudas, es a la hora que tú explicas y dice así [*lee la respuesta al estudiante*] veo que hay mucha verdad en lo que escribes aquí, pero donde veo que no te queda claro es ¿qué es desplazamiento y qué es trayectoria?

[66] JGE: A ver, el desplazamiento [...] era [...] era este [...], pues yo entendí más estos conceptos cuando usted nos explicó lo que venía siendo lo del camino largo y el camino corto, o sea siempre se me viene a la mente, pero ahorita ya no recuerdo bien cuál era cuál.

[67] Maestra: [*Ríe*]

[69] JGE: Pero, o sea, si me vuelve a preguntar y tal vez lo repasara, a ver si ya le concluiría mejor, pero yo creo que sí me confundí [*se refiere a sus resultados*], pero creo que la rapidez es el camino corto ¿no?

[70] Maestra: Largo.

[71] JGE: Largo y la velocidad media el corto.

[72] Maestra: Esa es la parte que yo siento que hay que retomar para que te quede claro. La distancia total es trayectoria y la trayectoria siempre será positiva. ¿Qué diferencia hay entre posición y distancia?

[73] JGE: Que la posición viene siendo un punto y distancia viene siendo la diferencia de un punto inicial a un punto final.

[74] Maestra: Ese sería el desplazamiento.

[75] JGE: ¿Desplazamiento? ¿Posición?

[76] Maestra: Fíjate, aquí yo te podría decir [muestra la imagen de la actividad 6 acompañada de una tabla que muestra las posiciones y los tiempos]¿cuál es la posición inicial de esta persona?

[77] JGE: Cero.

[78] Maestra: Exacto [*señala con un color el punto que indica la posición inicial*] ¿y cuál es la posición final? Recuerda que va hacia la derecha da media vuelta y regresa.

[79] JGE: Es menos 10 [*señala el punto con el dedo*].

[80] Maestra: Y esta sería la posición final [*señala con un color el punto que indica la posición final*], entonces la posición, como dijiste hace un rato, es un punto. En efecto, es un punto. ¿Y la distancia entonces? ¿Es un punto? ¡No! ¡No es un punto! Cuando tú mides algo y te digo qué distancia tiene el frente de tu casa.....

[81] JGE: Viene siendo....

[82] Maestra: Aquí, por ejemplo, ¿cómo dibujarías la distancia entre la posición inicial y la posición final? [*Le entrega al estudiante el plumón.*]

[83] JGE: Viene siendo este segmento de aquí a acá. [*Dibuja un segmento de línea entre las dos posiciones.*]

[84] Maestra: Exactamente, ese segmento de longitud, esa es la distancia. Entonces me regreso a la Actividad 7 y tú escribiste: *el desplazamiento es la suma de todas las posiciones*. Entonces, si las posiciones son puntos no vamos a sumar los puntitos, vamos a sumar las distancias. ¿Podrías decirme la diferencia entre posición, trayectoria y desplazamiento?

[85] JGE: A ver, posición vendría siendo un punto donde se encuentra la persona, este, trayectoria viene siendo la [...] lo, lo [...], bueno podría decir la diferencia que hay entre posición final y posición inicial ¿no?

[86] Maestra: [*Mueve la cabeza señalando un no*]

[87] JGE: Este [...] [*Dirige su cabeza hacia atrás*] siempre tengo esa confusión.

[88] Maestra: Siempre tienes esa confusión, inclusive les di las fórmulas [*se las muestra y señala los conceptos que comprende cada uno*]. Fíjate, a veces hay *tip's* para acordarse de algo. Tienes la idea, pero confundes la palabra y si hablas de camino corto y camino largo ¿quién es el camino corto?

[89] JGE: El camino corto es la velocidad media.

[90] Maestra: Así es, por lo tanto, el camino largo es....

[91] JGE: La rapidez.

[92] Maestra: Para terminar, te pido que grafiques en un plano cartesiano los datos de la Actividad 7 y después discutimos dónde está ese 2 m/s y en dónde ese -0.28 m/s .

[93] JGE: [*El estudiante bosqueja la gráfica señalando al eje vertical como el tiempo y al eje horizontal como las posiciones*] ¿Quedaba así, ya no recuerdo? [*En sus resultados, el eje vertical representaba posiciones y el eje horizontal representaba el tiempo. El estudiante se sentía confundido.*]

[94] JGE: Creo que lo graficamos diferente ¿no? [*Se refiere en la Actividad 7 de la Secuencia Didáctica 2.*]

[95] Maestra: Puede ser que tú la grafiques así, es correcto también, pero si tú lo graficas así...

[96] JGE: Debe dar lo mismo ¿no?

[97] Maestra: Sí [*el estudiante continúa graficando y cuando termina se le pide*] ¿puedes señalar la posición inicial y final con color rojo?

[98] JGE: [*El estudiante señala correctamente lo que se le pide*]

[99] Maestra: ¿Puedes dibujar el desplazamiento?

[100] JGE: Desplazamiento... viene siendo... [*Dibuja la línea que une a la posición final e inicial correctamente*]

[101] Maestra: ¡Exacto! ¡Exacto! ¡Muy bien! Ahora, vamos a platicar un poquito sobre esos valores: ese 2 m/s y ese -0.28 m/s ¿dónde crees que están?, tú imagínate [...] La trayectoria ¿cuánto fue?

[102] JGE: ¿La trayectoria? Fueron 10 metros [...] trayectoria [...] trayectoria [...] no fue la suma de todo esto.

[103] Maestra: Es la suma de todo eso y mira puedes verlo aquí, se fue para acá y después para acá. [*Señala con la mano, sobre el esquema, la forma en la que se mueve la persona.*]

[104] JGE: Entonces, eran 30 [...] 70 metros.

[105] Maestra: ¡Esa es la trayectoria! ¿Podrías dibujar una coordenada que tenga 70 metros por un lado y 35 segundos por el otro? ¿Podrías unir el origen con ese punto? [*El estudiante realiza lo solicitado.*] Entonces, ¿por donde más o menos podrías pensar que sea ese 2 m/s y ese -0.28 m/s ?

[106] JGE: Dos, es que viene siendo la relación de la velocidad con respecto al tiempo, entonces, vendría siendo los [...] ¿cómo le podría decir? [...] Viene siendo lo que decíamos. Está pendiente [*señala un punto sobre la recta que dibujó de coordenadas 70, 35*] ¿no? Porque recorre 10 entre [...] o sea es por Pitágoras [...] la relación de 10 y [...]

[107] Maestra: Posiblemente, a lo mejor te ubicas más si ves cómo graficaron ustedes en la secuencia. [*La maestra muestra al estudiante la forma que graficaron en la secuencia didáctica.*]

[108] JGE: [*Observa la gráfica que le muestra la maestra*] mmmm!

[109] Maestra: Te muestro [*muestra la maqueta*] esta es la que graficamos todos en clases, esta es la trayectoria [*señala el color rosa*] y este es el desplazamiento [*señala el color verde*], entonces, fíjate voy a tomar y voy a *estirar la trayectoria* y mira la coordenada que tiene 35, 70, entonces ésta es la pendiente [*señala la pendiente color rosa*] de 2 m/s

[110] JGE: O sea, es lo que quería dar a entender, porque siempre va en esa proporción de [...] ¿cómo le podría decir? [...] Si avanza 10 metros con respecto a 5 segundos, entonces si hacemos la división de 10 entre 5 siempre va a ir de 2, pero no sabía cómo explicarlo.

[111] Maestra: Y -0.28 m/s es esta línea [*señala la línea verde*] está de forma negativa [*se refiere a la pendiente de la recta*], pero es una pendiente muy suave; por eso es 0.28, pues prácticamente se desplazó una distancia muy corta, ves, no sé si esto te ayuda a entender más.

[112] JGE: Sí, sí, sí, sí.

[113] Maestra: Bueno con esto damos por terminada la entrevista, muchas gracias.

4.6.2.1. Recapitulación sobre los resultados obtenidos de la entrevista del estudiante JGE

Después de analizar las respuestas verbales, las anotadas en el pintarrón y corporales del estudiante JGE, se puede percibir que el estudiante logró tener avances en la interpretación del sentido del movimiento, el cálculo del valor de la velocidad, posiciones, tipo de velocidades (constante o variable), identificó las veces que pasa el objeto por el origen, aún no le quedó claro la diferencia entre rapidez y velocidad, por lo tanto aún sigue teniendo confusión entre los conceptos de trayectoria y desplazamiento. Como al momento de ver un gráfico se tienen que interpretar todas las unidades significantes y éstas se pueden discriminar sometiendo esta representación a todas las variables posibles, con la condición de que las representaciones así formadas sigan teniendo sentido, entonces a medida que el estudiante se familiarice con todo este sistema de representación puede ir comprendiendo.

Esta comprensión depende, posiblemente, de la frecuencia del uso de gráficos y del trabajo neuronal de forma inconsciente.

4.6.3. Entrevista del estudiante ARA

[114] Maestra: Te pido [que] vuelvas a interpretar la gráfica 4 de la evaluación diagnóstica, recordándote que se trata de una persona que está caminando sobre una superficie horizontal.

[115] ARA: Pues, tenemos un punto de origen, o sea y entonces el personaje está ubicado a -6, 6 metros de ese punto [*mueve la mano derecha hacia adelante*]. Entonces, él al regresar a ese punto es una velocidad constante en cinco minutos o unidades de tiempo y luego permanece en esa posición durante 4 unidades de tiempo y llega al lugar de origen en [*no alcanza a ver bien el dato*].

[116] Maestra: ¿Quieres que te diga? Este es 9 [*señala el punto en el que la línea recta del tercer intervalo de tiempo corta al eje horizontal*].

[117] ARA: Nueve unidades de tiempo y este, pero aún sigue yendo y se va más allá y llega a -2 metros o sea a la izquierda del punto de origen.

[118] Maestra: ¿La posición inicial sería...?

[119] ARA: En seis metros.

[120] Maestra: ¿La posición final sería...?

[121] ARA: Menos dos metros a la izquierda [*mueve la mano hacia la izquierda*].

[122] Maestra: ¡Exacto! Ahora, estás hablando de izquierda y derecha a diferencia de antes que venía cayendo, ¡muy bien! ¿Y en qué posición estaba cuando se quedó quieto en esas tres unidades de tiempo?

[123] ARA: En dos metros.

[124] Maestra: En dos metros, ¿a la izquierda o a la derecha del origen?

[125] ARA: A la derecha del origen.

[126] Maestra: ¿Me podrías decir cómo son las velocidades en los intervalos? ¿Si son iguales o una es mayor que la otra? Aquí hay una calculadora.

[127] ARA: Pues, en la gráfica se ve que son constantes en ambos [...] es la misma pendiente que tienen en ambos intervalos.

[128] Maestra: Eso quiere decir que sus velocidades valen lo mismo ¿y cuánto valen? ¿Podrías observar ahí? ¿Podrías calcular?

[129] ARA: [*Se queda observando la gráfica por espacio de 30 segundos*] era...

[130] Maestra: Si quieres te recuerdo un poquito cómo va la ecuación. [*Escribe la ecuación de velocidad* $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$; *señala que el numerador es desplazamiento.*]

[131] ARA: [*Toma la calculadora y observa la ecuación, mira la gráfica y realiza las operaciones en la calculadora*] ¿Es 6 el tiempo en el primer intervalo? [*No alcanza a ver bien los datos.*]

[132] Maestra: A ver, aquí es 1, 2, 3, 4.

[133] ARA: 4 [*realiza operaciones en la calculadora por espacio de 15 segundos*] es menos uno.

[134] Maestra: Así es, menos uno, porque se está dirigiendo hacia la izquierda, hacia atrás ¿verdad? Ya no estamos pensando que viene cayendo [*se ríe: ja, ja, ja*]. Entonces, las dos velocidades son iguales, porque me decías que sus pendientes son iguales ¿no? Entonces, una línea recta significa que su velocidad es constante

[135] ARA: Sí, que es constante.

[136] Maestra: Me paso a la gráfica 6 [*de la evaluación diagnóstica*] ¿puedes leer lo que escribiste la vez pasada?

[137] ARA: [*Lee lo que respondía y al terminar se ríe –seguramente porque se dio cuenta de que no era así la respuesta correcta–*]

[138] Maestra: Ahora ¿cómo verías esa gráfica, pensando que es una persona caminando por una calle?

[139] ARA: Para empezar, tiene velocidad variable porque tiene bastantes pendientes y partiría de las 7 unidades de metros del origen.

[140] Maestra: [*Observa que no es 7 y cuenta; señala el punto en cuestión*] Aquí sería 1, 2, 3, 4, 5, 6.

[141] ARA: Mmm. [*Acepta el dato*] del origen.]

[142] Maestra: Y ¿hacia dónde se dirige?

[143] ARA: Hacia su derecha, de retroceso, pasa el origen y sigue avanzando todavía más.

[144] Maestra: Y ¿en qué tiempo pasa por el origen?

[145] ARA: En cuatro unidades de tiempo.

[146] Maestra: Vamos a pasar a la Secuencia Didáctica 1, y en esa secuencia en la Actividad 5, aquí hay una pregunta que dice: ¿cómo son los resultados entre la rapidez y la velocidad media a los 35 segundos? Y ¿qué significa? [*Muestra los resultados de la Actividad 5 donde la rapidez y la velocidad media son iguales a -0.28 m/s*]. Me voy a regresar a las ecuaciones donde la rapidez es dividir la distancia total entre el tiempo total, esa distancia total la conocemos como trayectoria. Tu respuesta dice: *son iguales*, ¿por qué crees que son iguales, si vemos que las fórmulas son diferentes?

[147] ARA: Creo que está mal eso.

[148] Maestra: A ver, dime tú ahora.

[149] ARA: Porque no son menos 10 metros, son 40 metros los que recorrió.

[150] Maestra: ¿Qué es trayectoria? Trayectoria es la distancia total, y ¿cuánto fue la distancia total que esa persona caminó?

[151] ARA: Son 40 metros.

[152] Maestra: ¿En total?

[153] ARA: Son 30, ¡ha no! Son [...] 70 metros.

[154] Maestra: Entonces, ¿puedes pasar a escribirlo? [*Sustituir los valores en la ecuación que se muestra en el pintarrón.*]

[155] ARA: Es 70 metros entre 35 segundos igual a 2 m/s.

[156] Maestra: ¡Exacto! Entonces, aquí [*señala el resultado de la rapidez del estudiante en la Actividad 5*] sería...

[157] ARA: 2 m/s .

[158] Maestra: Y ¿esta? ¿Es correcta? [*Señala el resultado de la velocidad.*]

[159] ARA: Esta sí, está bien, el desplazamiento sería los 10 metros.

[160] Maestra: 10 metros ¿hacia dónde?

[161] ARA: Hacia la izquierda.

[162] Maestra: Por eso es el signo ¿no?

[163] ARA: Sí

[164] Maestra: Ahora sí están correctas tus respuestas. ¿Podrías decirme gráficamente en dónde podríamos ver este resultado de 2 m/s y el de 0.28 m/s ? ¿Podrías graficar estas posiciones en un plano cartesiano y después mostrarme en la gráfica en dónde veo este 2 m/s y -0.28 m/s ?

[165] ARA: Bueno, primero, yo graficaría los valores que están ahí, los puntos y, bueno uniendo su trayectoria para este [...] [*Pasa a dibujar las coordenadas de tiempo y posición, después une los puntos con color rojo y se observa la gráfica con dos líneas rectas una creciente y otra decreciente.*]

[166] Maestra: ¿Puedes, con un color diferente marcar la posición inicial?

[167] ARA: [*Realiza correctamente lo solicitado, marca con color verde (0,0)*]

[168] Maestra: ¿Y la posición final?

[169] ARA: [*Realiza correctamente lo solicitado, marca con color verde (35, -10)*]

[170] Maestra: Si tú unes esos dos puntos, ¿qué significará?

[171] ARA: Su desplazamiento.

[172] Maestra: ¿Puedes pintarlo con verde?

[173] ARA: [*Realiza lo solicitado, pinta una línea que une la posición inicial con la posición final*].

[174] Maestra: ¿Cómo representaríamos esos 2 m/s y esos -0.28 m/s ?

[175] ARA: Los 2 m/s sería la velocidad lleva aquí [*pasa su dedo sobre las dos líneas rectas de color rojo, creciente y decreciente*] que necesitaría para llegar acá [*señala la posición final*] es como el camino largo para llegar a este punto [*señala la posición final*]. Requerirá 2 m/s para llegar al mismo tiempo que de una persona que sale de aquí [*señala el origen*] y llega hasta acá [*señala la posición final*] él se va a llevar solo 0.28 m/s, porque es menos distancia y el otro necesita más velocidad para llegar más rápido a donde necesita llegar.

[176] Maestra: Hablas del camino largo y del camino corto, eso me comentaban tus compañeros que les ayudó bastante para entender más estos conceptos. ¡Mira! Hice esto [*muestra la maqueta*]. Voy a poner este punto aquí [*se refiere a tomar la línea recta decreciente que terminaba en la coordenada (35, -10) y la coloca en la coordenada (35, 70)*], y sabes ¿qué son esos 2 m/s?, esos 2 m/s es esta pendiente [*pasa la mano sobre la línea que va desde la coordenada (0,0) hasta la coordenada (35, 70)*] y los 0.28, pues como es negativo los 0.28 [*señala la línea recta decreciente que va desde la posición inicial hasta la posición final*], pues la pendiente muy suave. No sé si esa forma de ver el camino largo como platicábamos te ayuda a entender en dónde estaba ese 2.

[177] ARA: [*Asiste con la cabeza*] Súper bien.

[178] Maestra: Tú ¿qué opinas?

[179] ARA: Mucho más fácil, ya cuando se te haga más difícil la trayectoria, la puedes hacer así. [*Mueve la mano haciendo una sola línea recta.*]

[180] Maestra: Es como estirar el camino, agarras el camino, en vez que quede todo así en zig-zag lo estiras y coincide la distancia total con el tiempo total y esa va a ser, esa velocidad. [*Señala el valor de 2 m/s.*] Bueno ARA, me da gusto ver tu avance y te agradezco tu participación.

4.6.3.1. Recapitulación sobre los resultados obtenidos de la entrevista del estudiante ARA

Al contestar de nuevo las preguntas que se detectaron como fallidas, las cuales se encuentran en la manera II (Icónica), el estudiante pudo decodificar y codificar de una interpretación figurar: los puntos, líneas, cruce de los ejes cartesianos con las líneas, líneas con pendiente creciente o decreciente, valor de la pendiente a una interpretación de

movimiento físico. Incluso, pudo decodificar de una interpretación matemática a una interpretación de movimiento físico la velocidad media y la rapidez apoyándose en el concepto del camino corto y el camino largo. Se nota el avance de la comprensión de todos los conceptos inmersos en un gráfico, ya que incluso la actitud de reírse de lo que había escrito, sabiendo ahora que estaba mal, es señal de objetivación.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

5.1. Introducción

Parece simple la acción de caminar hacia la derecha –de un punto de referencia– detenerse dar media vuelta y regresar por el mismo camino hasta detenerse, finalmente, un poco más a la izquierda del punto de inicio. La acción antes descrita se puede ver diariamente. Sin embargo, no es fácil de interpretarla si ésta aparece en un gráfico, ya que primero se debe caracterizar qué representa cada eje, ver la posición inicial, el tipo de líneas (rectas o curvas), tipo de pendiente (creciente, decreciente o sin pendiente), las veces que las líneas cortan al eje horizontal, la posición final.

Mediante la visualización de la representación gráfica del movimiento de un objeto en el plano, se puede conocer la trayectoria, el desplazamiento, el sentido del movimiento, las veces que el objeto pasa por el origen, así como la rapidez y la velocidad. Identificar el tipo de movimiento del objeto en el plano permite determinar el tipo de función, si es que tal movimiento se puede modelar con este objeto matemático. Entonces, discriminar datos visualmente ayuda a relacionar el gráfico con la expresión algebraica [si es posible encontrarla a partir del modelo asociado con el movimiento del objeto en el plano] que define el tipo de movimiento. Por lo tanto, la manera de ver los gráficos depende de la comprensión del funcionamiento del sistema de representación.

5.2. Respecto a los objetivos de investigación

El primer objetivo particular: *El estudiante podrá identificar la posición de un objeto respecto al tiempo en un sistema de referencia inercial, podrá decir la posición inicial, posición final y el tiempo cuando pase por el origen.* De acuerdo con los datos disponibles, es factible decir que este objetivo fue logrado, pues todos los estudiantes lograron llevar a cabo las acciones descritas en el objetivo sin mayor dificultad. Más precisamente, las evidencias mostradas en el Capítulo precedente corresponden a la manera de ver I Local por punteo, la más fácil de todas. Mediante esta manera de *ver* se identifican puntos y lecturas de valores correspondientes a los ejes coordenados.

Respecto al segundo objetivo particular: *El estudiante podrá interpretar a partir de la posición de un objeto, la distancia total recorrida del mismo respecto al tiempo, esto quiere decir que podrá interpretar el sentido en el que se mueve respecto al tiempo y sumar la distancia total del movimiento.* Este objetivo corresponde a la segunda manera de ver II Icónica, pues se le da significado tanto a las líneas rectas o curvas basado en las pendientes de las rectas y en la proyección ortogonal hacia el eje de las posiciones [ordenadas]. De acuerdo con la distancia reflejadas [proyectadas], éstas se van sumando hasta obtener la distancia total de todo el movimiento y, de esa manera, identificar toda la distancia recorrida por el objeto en movimiento.

La habilidad antes descrita fue desarrollada por los estudiantes en etapas; no fue inmediata la comprensión. Las actividades diseñadas e implementadas ayudaron al logro de esta habilidad; sobre todo, la Actividad 6. En esta Actividad se utilizó el esquema representando a una persona caminando en dos sentidos. Mediante ese esquema se podía percibir el movimiento físico que ésta realizaba y se inició el cálculo de la distancia total recorrida por esa persona. En la Actividad 8, se habló del **camino largo**; en la Actividad 9, se habló del sentido o dirección del movimiento de acuerdo con el tipo de pendiente de la recta; este concepto se reafirmó en la Actividad 12.

Respecto al tercer objetivo particular: *El estudiante podrá interpretar, a partir de la posición de un objeto, el desplazamiento del mismo respecto al tiempo, es decir, que él podrá identificar la distancia entre la posición inicial y final.* De acuerdo con la Teoría utilizada en este trabajo, se puede decir que este proceso corresponde a la manera de ver II Icónica; similar a la inmediata anterior. En ésta se identifica la distancia del desplazamiento y el sentido de éste. A esta distancia se le denominó **camino corto**. Es importante comentar que los estudiantes identificaban con más facilidad las palabras **camino largo** y **camino corto** en vez de distancia total recorrida y desplazamiento.

Referente al cuarto objetivo particular: *El estudiante podrá relacionar el tipo de velocidad –constante o variable– con la función lineal y cuadrática.* De acuerdo con los datos disponibles, se puede decir que este objetivo también fue cumplido por etapas. Éstas están comprendidas en la manera de ver II Icónica. En la Actividad 10 se inició con una tabla de valores de posición y tiempo, la cual se convertía en un grafo. Esta tabla permitía

identificar la forma de la línea (una sola recta o varias rectas), posteriormente, con el cálculo de la velocidad y la aceleración para diferentes intervalos se identificaban los tipos de líneas con los tipos de velocidades.

Respecto del quinto objetivo particular: *El estudiante podrá calcular la rapidez media y la velocidad media del mismo objeto a partir de la distancia total recorrida y el desplazamiento.* Los datos disponibles permiten afirmar que los estudiantes confundían las palabras que se escribieron en la Actividad 8, ya que algunos de los estudiantes les fue más fácil identificar **el camino largo y el camino corto** en lugar de distancia total recorrida y desplazamiento. Debido a esta confusión y a la insistencia de esta pregunta en varias actividades (5, 7 y 8c) los estudiantes decidieron adoptar los conceptos de distancia total recorrida y desplazamiento por camino largo y corto para estos conceptos.

El último objetivo particular es: *El estudiante podrá interpretar la diferencia entre la rapidez media y velocidad media de un objeto representado en un sistema de referencia inercial.* Los conceptos de física, inherentes en este objetivo, al igual que el quinto objetivo fue uno de los que más tiempo llevó a los estudiantes en comprender-incluso esta diferencia no fue comprendida en otros estudiantes-, ya que existe una relación muy estrecha entre los dos objetivos. En esta parte se pretendía que el estudiante percibiera y explicara la diferencia entre la rapidez media y la velocidad media.

Aun en las entrevistas se observa que algunos de los estudiante terminaban de comprender algunos de los conceptos, excepto un estudiante que posiblemente al tratar de explicar el concepto de distancia total recorrida y desplazamiento se haya confundido debido a que el estudiante graficó de forma diferente del resultado que obtuvo en la secuencia, es decir, tomó al eje vertical como el tiempo y al eje horizontal como la posición. Sin embargo, en la interpretación de todos los estudiantes se logró identificar la comprensión entre el *signo* y el *significado*. Esta interpretación permitió que el estudiante lograra darle sentido a las líneas y puntos que observaba o miraba y le asignara propiedades y relaciones para poder *ver* un movimiento físico. Este proceso de aprendizaje o desarrollo de una habilidad le da al estudiante la objetivación del concepto en discusión, es decir, la toma de conciencia que le permite llevar a cabo los razonamientos y los cálculos necesarios para la toma de decisiones.

5.3. Respecto a las preguntas de investigación

1) *¿Qué efecto tiene en el aprendizaje de los estudiantes de ingeniería la utilización de gráficas cartesianas en la modelación e interpretación de objetos físicos?* y 2) *¿Cómo llevan a cabo los estudiantes la conversión del registro gráfico al simbólico?* Al desarrollar esta habilidad, los estudiantes de ingeniería pueden describir comportamientos de fenómenos de cualquier tipo, desde movimientos físicos, fuerzas aplicadas, trabajo realizado por una partícula, entre otros. Desarrollar esta habilidad les permite tener una perspectiva más amplia al momento de resolver un problema, y mayor entendimiento de la situación, ya que lo que se ve en las gráficas son conceptos sujetos a matematizarse.

La conversión del registro gráfico al simbólico implica matematizar los datos que ven en los gráficos y este procedimiento es familiar a los estudiantes. Ellos identifican, en primer lugar, el tipo de función –lineal o cuadrática– posteriormente, saben qué tipo de función deben encontrar y se apoyan en las ecuaciones de la recta y de segundo grado. Lo siguiente es ejecutar algoritmos que los llevan a encontrar las funciones. Como último paso de este trabajo, se le pidió a los estudiantes que identificaran las funciones que les corresponde a cada gráfica.

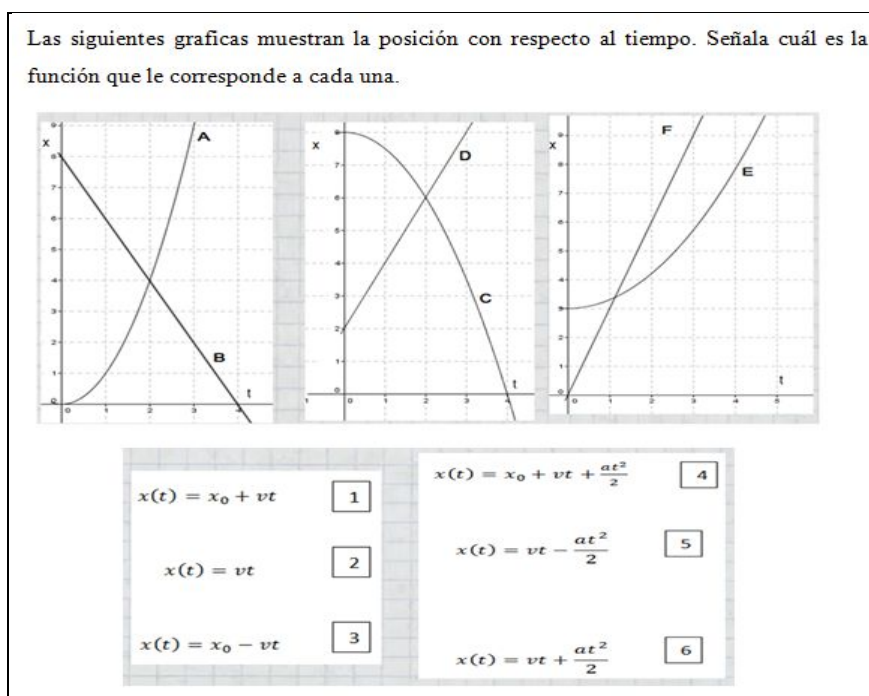


Figura 5. 1. Ejercicio final, relación entre las gráficas y las funciones.

El resultado obtenido fue que dos de los cuatro estudiantes lograron identificar, correctamente, todas las funciones con cada una de las gráficas. Un estudiante logró identificar cuatro funciones de seis, y el último estudiante sólo pudo identificar dos de seis funciones. A pesar de que significa un logro para ellos, se deben practicar [más bien, discutir con los estudiantes] con más frecuencia las conversiones de registros, tanto en clases como en otros sitios [e.g., en foros de discusión], cada vez que se trate de la resolución de problemas matemáticos escolares o de física educativa.

5.4. Reflexiones finales

¿Por qué los estudiantes no comprendieron el concepto de distancia total recorrida y desplazamiento en la Actividad 6? ¿Por qué fue largo el proceso de comprensión de estos conceptos? ¿Tal vez fue el diseño? ¿Fue conveniente contarles la historia del camino largo y camino corto? ¿O fue que los estudiantes al no tener compromiso –de obtener una calificación para acreditar un curso en particular– con las asesorías no ponían interés en la resolución de las actividades? ¿O tal vez sea todo lo anterior? Estas y otras preguntas surgen al momento de tratar de concluir qué sucedió en el transcurso de este trabajo de investigación.

De la Actividad 1 a la Actividad 4 se comenzó a involucrar el concepto de distancia total recorrida; fue en la Actividad 6 en la que se explica los conceptos de distancia total recorrida y desplazamiento, y es al final de esa Actividad donde se le compara a la distancia total recorrida con el camino largo y al desplazamiento con el camino corto. A partir de la Actividad 6, los estudiantes se referían al camino largo y corto en lugar de distancia total recorrida y desplazamiento. En Actividad 7 se calculaba la rapidez media y la velocidad media. Los resultados surgidos de esta Actividad son erróneos debido a que cambiaban los valores de la distancia total recorrida con los del desplazamiento. Pero llegó el momento de la iluminación para algunos estudiantes en la Actividad 7 y para otros en la Actividad 8 y uno de los estudiantes al momento de la entrevista.

Este proceso fue largo ya que la codificación y decodificación –signo y significado– requiere tiempo para los cambios en la estructura cognitiva. De acuerdo con Tall y Vinner (1981):

La información sensorial estimula ciertas vías neuronales e inhabilita otras. De esta manera, la estimulación puede activar diferentes partes de la imagen del concepto, desarrollándolas de manera que no necesita ser todo coherente [...] es posible que los puntos de vista conflictivos sean presentados en la mente de un individuo dado en tiempos diferentes, sin que el individuo esté consciente del conflicto hasta que sean evocados simultáneamente. (p. 7, *The Psychology of advanced mathematical thinking*)

El proceso mismo de darle significado matemático y físico a las líneas y puntos, asociadas con el movimiento de objetos, es complejo. De acuerdo con Duval (2001): "Numerosas observaciones y encuestas han mostrado que dos tercios de los alumnos durante todos sus estudios no han pasado de la manera de ver I a la III y que es la manera de ver II la interpretación dominante" (p. 66).

Desde el inicio de este trabajo, en el diseño de las Actividades se pretendió tener una percepción del fenómeno físico y se estuvo trabajando con este tipo de esquemas desde la Actividad 1 hasta la Actividad 8. Fue en la Actividad 9 donde se introdujo el plano cartesiano y se trabajó con éste en las Actividades 10, 11 y 12. A pesar de tener presente los objetivos de este trabajo, los estudiantes tuvieron dificultades de comprensión del concepto de desplazamiento. El concepto de distancia total recorrida fue trabajado a partir de las Actividades 1, 2, 3 y 4, sin embargo, los datos disponibles sugieren que el concepto de desplazamiento debió ser incluido en esas Actividades. Se propone una Actividad, en un diseño posterior, incluir el esquema formado por líneas que representen la distancia total recorrida y desplazamiento de objetos en movimiento.

Como estos conceptos –distancia total recorrida y desplazamiento– conforman al concepto de rapidez media y velocidad media, al no comprender los primeros no es posible comprender los segundos. Por esta razón, las respuestas de la Actividad 5 no fueron correctas y a medida que se iba comprendiendo las respuestas relacionadas con la rapidez media y la velocidad media, entonces las respuestas de las Actividades 7 y 8 fueron contestadas, correctamente. Algunos estudiantes, en la Actividad 7, otros en la Actividad 8, otros durante la entrevista, lograron comprender los conceptos de distancia total recorrida y desplazamiento. Sin embargo, uno de ellos siguió teniendo dificultades en la comprensión de estos y de otros conceptos relacionados con el movimiento de objetos.

El diseño de una Actividad, donde se muestre la línea recta [una sola] con su pendiente, y que ésta esté asociada con la distancia recorrida por el móvil [trayectoria rectilínea] y el valor de la rapidez media, asociándola con la línea recta que ejemplifique la distancia [desplazamiento] y el valor de la velocidad media, posiblemente, hubiese ayudado a cerrar el ciclo de comprensión de estos y de otros conceptos similares. A continuación, se muestra la actividad complementaria.

La siguiente gráfica representa un objeto en movimiento durante 30 segundos. Tomando datos del gráfico, calcula la velocidad cuando se dirige hacia la derecha y la velocidad cuando se dirige hacia la izquierda; calcula también la rapidez media y la velocidad media.

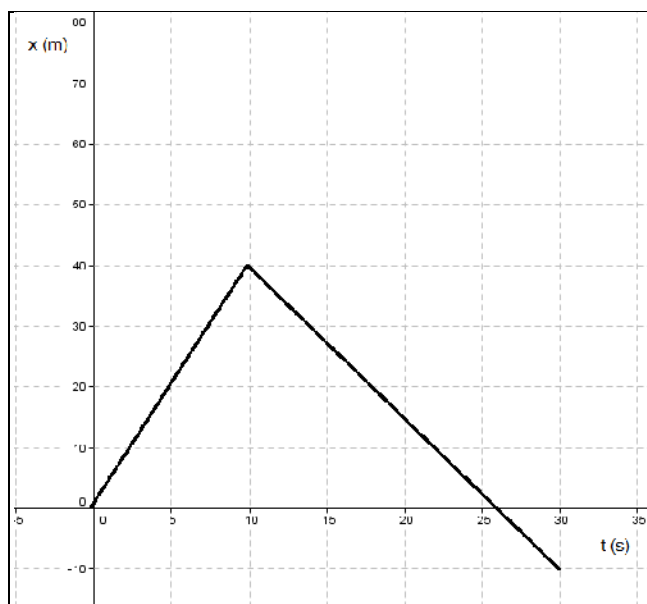


Figura 5. 2. Representación gráfica del movimiento de un objeto.

¿Alguno de los cuatro resultados son iguales? ¿Es posible explicar –con ayuda de la gráfica– cada uno de esos resultados? Se esperan las siguientes respuestas del estudiante respecto de las dos preguntas antes planteadas:

La velocidad cuando [el objeto] se mueve hacia la derecha es de: $v = 4 \text{ m/s}$;

La velocidad cuando [el objeto] se mueve hacia la izquierda es de: $v = -2.5 \text{ m/s}$;

La velocidad media (de la posición inicial a la posición final) es de: $v = -0.33 \text{ m/s}$;

La rapidez media del movimiento durante los 30 segundos es de: $v_R = 3 \text{ m/s}$.

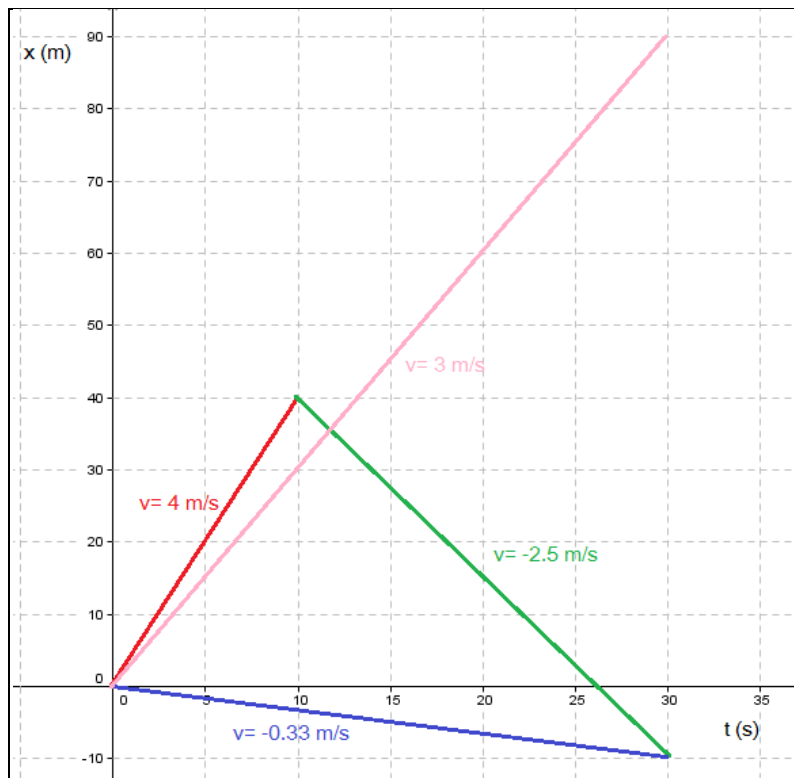


Figura 5. 3. Resultados esperados de la Actividad propuesta.

La rapidez media, siempre es positiva; lo que significa dividir toda la distancia total recorrida, sin importar el sentido del movimiento, entre el tiempo en el que éste tardó al completar su recorrido [del movimiento]. La velocidad media depende del desplazamiento, siendo ésta una cantidad vectorial. En esta cantidad, el signo indica hacia dónde se dirige el objeto en movimiento. La cantidad de 4 m/s indica la velocidad cuando el objeto se dirige hacia la derecha y la cantidad -2.5 m/s indica la velocidad cuando éste se dirige hacia la izquierda.

Este ejercicio se le presentó al estudiante por medio de una maqueta al final de la entrevista. Se esperaba que esta ayuda [al estudiante] mejorara la comprensión de estos conceptos; la respuesta de ellos fue que, viendo la maqueta, entendían mejor el valor de la rapidez media. El hecho de señalar la distancia total recorrida y el desplazamiento, como el camino largo y el camino corto, respectivamente, los estudiantes expresaron que les había ayudado a comprender mejor estos conceptos. Al momento de la entrevista, todos los estudiantes usaron estas expresiones [camino corto y camino largo] para explicar la rapidez media y la velocidad media del móvil.

La gran mayoría de los estudiantes, posiblemente, no sentía un compromiso al asistir a las asesorías a menos que necesitaran resolver problemas de la materia de dinámica; incluso, los estudiantes que asistieron a 100 % de las asesorías entendían más rápido los procesos en la resolución de los problemas. En conclusión, se considera que los resultados obtenidos en esta tesis fueron positivos, pues se lograron los objetivos, aunque con algunos de los participantes fue tardada la comprensión de algunos conceptos explorados en las Actividades. Los procesos de comprensión logrados por los estudiantes [objetivación] se debieron, tal vez, a la dinámica implementada con ellos cuando resolvieron los problemas contenidos en las Actividades.

Los procesos de conversión fueron, relativamente, fáciles para los estudiantes, ya que dominaban con soltura la sintaxis de los objetos simbólicos inmersos en las Actividades, por ejemplo: resolución de sistemas de ecuaciones lineales, matrices y determinantes, lo que significa que los estudiantes en semestres más avanzados dominan más algoritmos matemáticos comparados con aquellos que estudian los primeros semestres de la Universidad.

5.5. Perspectivas de trabajos futuros sobre esta línea de Investigación

La forma de captar el interés del estudiante es llevar a cabo este trabajo de investigación en las materias de física AD-124 o dinámica AD-135, incluir la Actividad propuesta en la sección 5.3, resolver las Secuencias Didácticas en un primer momento de forma individual. En un segundo momento, resolverlas [las Actividades] en equipo de tres, exponer los resultados al grupo y retroalimentar, por parte del profesor, aquello que hiciera falta de discusión o de comprensión, ya que la forma de *ver* de un estudiante o equipo puede ayudar a comprender mejor conceptos en discusión. Centrarse en la forma de *ver* II Icónica, para que los estudiantes puedan codificar y decodificar las líneas y puntos mostrados en los gráficos, cuando estos sean dados por ellos, o bien, que ellos los construyan.

Referencias bibliográficas

- Duval, R. (1999). *Semiósis y Pensamiento Humano*. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, 1999. Cali, Colombia.
- Duval, R. (2001). *Los Problemas Fundamentales en el Aprendizaje de las Matemáticas y las Formas Superiores en el Desarrollo Cognitivo*. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, 2001. Cali, Colombia.
- Giancoli, D. (2002). *Física para Universitarios*. México: Prentice Hall.
- Giancoli, D. (1997). *Física principios con aplicaciones*. México: Prentice Hall.
- Griffith, T. (2014). *Física Conceptual*. México: McGraw-Hill.
- Hibbeler, R (2010). *Dinámica*. México: Prentice Hall.
- Larson, R. (1999). *Cálculo*. Volumen 1. España : McGraw-Hill.
- Miranda, I., Radford, L. & Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación Matemática*, 19(3), 5-30.
- Radford, L. Demers, S. Guzman, J., Cerulli, M. (2003). Calculators, graphs, gestures and the production of meaning. In: N. Pateman, B. Dougherty and J. Zilliox (eds.), *Proceedings of the 27 Conference of the international group for the psychology of mathematics education (PME27 –PMENA25)*, University of Hawaii, 2003, Vol. 4, pp. 55-62.
- Resnick, R. (2002). *Física*. Volumen 1. México: CECSA.
- Tippens, P. (2011). *Física conceptos y aplicaciones*. México: McGraw-Hill.
- Salinas, H. (2013). Influencia de los sistemas de referencia en el surgimiento de significados conceptuales. Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN).
- Sears, F. (1999). *Física Universitaria*. Volumen 1. México: Pearson Educación.
- Serway, R. (2002). *Física para ciencias e ingeniería*. México: McGraw- Hill.

Tall & Vinner (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, Vol. 12*, pp. 151-169.